چگونگی استفاده از از ناهمواری (آلیاسینگ) در سیگنال های باند محدود

چکیده

در سیستم های پردازش سیگنال، ناهمواری به طور معمول به عنوان یک سیگنال نگران کننده در نظر گرفته می شود. این کار نیاز به فیلترهای آنالوگ موثر، نوری و ضد ناهمواری دیجیتال را الزامی می دارد. با این حال، ناهمواری نیز اطلاعات با مقداری را بر روی سیگنال بالای فرکانس نایکوئیست انتقال می دهد. از این رو، پردازش موثر نمونه ها، بر اساس یک مدل از سیگنال ورودی افزایش فرکانس نمونه برداری را با استفاده از مبدل های آهسته تر و ارزان تر میسر می سازد. در این مقاله ، ما از الگوریتمی برای سیگنال های باند محدود را ارائه می دهیم که زیر دو برابر فرکانس سیگنال حداکثر نمونه برداری می شوند. با استفاده از روش شبه فضا در حوزه فرکانس، ما نشان می دهیم که این سیگنال ها را می توان از مجموعه های متعددی از نمونه ها بازسازی نمود. جبران بین مجموعه نامشخص است و می تواند مقادیر دلخواه داشته باشد. این رویکرد را می توان برای ایجاد تصاویر با رزولوشن فوق العاده از مجموعه ای از تصاویر با کیفیت پایین استفاده نمود. در این کاربرد، پارامترهای ثبت نام باید از تصاویر در هم آمیخته محاسبه شود. ما نشان می دهیم که پارامترها و تصاویر با وضوح بالا را می توان دقیقا محاسبه نمود، حتی زمانی که سطح بالایی از ناهمواری بر روی تصاویر با وضوح پایین حاضر است.

1. مقدمه

به طور کلی، ما می گویند که یک سیگنال را در صورتی می توان کاملا از نمونه های آن بازسازی نمود که باند محدود باشد و فرکانس نمونه برداری، معیار نایکوئیست را را برآورده سازد، یعنی بزرگتر از دو برابر فرکانس سیگنال حداکثر باشد. اگر سیگنال باند محدود باشد و یا فرکانس نمونه برداری بیش از حد پایین باشد، سیگنال نمونه برداری ناهموار است و بازسازی کامل امکان پذیر نمی باشد.

Vetterli و همکاران . [۱] نشان دادند که بازسازی کامل است برای سیگنال های با سرعت محدود در تغییر نیز ممکن است. انواع خاصی از سیگنال های غیر باند محدود (مانند Diracs ، چند جمله ای مقطع و غیره) را می توان

از یک مجموعه متناهی از نمونه ها بازسازی نمود. Vaidyanathan [2] برخی از طرح های نمونه برداری دیگر را برای سیگنال های غیر باند محدود در نظر می گیرد ، مانند استفاده از هسته اصلی نمونه های مختلف. مروری بر وضعیت فعلی در نمونه گیری توسط Unser داده شده است [۳.]

در این مقاله ، ما برخی از نتایج برای سیگنال های باند محدود را استنتاج می کنیم که زیر دو برابر حداکثر فرکانس سیگنال نمونه برداری شده هستند. ما از مجموعه های متعددی از نمونه ها به طور منظم برای بازسازی سیگنال اصلی دقیقا استفاده می کنیم. یک مشکل مشابه برای سیگنال های زمان گسسته [۴] با استفاده از روش بهینه سازی ترکیبی توسط Marziliano و همکاران حل شده است.

۲. بیان مسئله

ما x(t) را به عنوان یک سیگنال زمان پیوسته، باند محدود و متناوب با دوره تناوب ۱ و ماکزیمم فرکانس L (زیرا ما یک سری فوریه را در نظر می گیریم که L یک عدد صحیح است). سری فوریه زمان پیوسته آن X[L] نامیده می شود (با $-L \leq l \leq L$).

x(t) به طور منظم در فرکانس K با K به عنوان یک عدد صحیح نمونه برداری شده است. این منجر به سیگنال زمان گسسته $y_0[n] = x[n/k]$. می شود. تبدیل فوریه زمان گسسته آن $Y_0[k]$ می تواند به صورت تابعی از ضرایب فوریه زمان پیوسته X[k] به صورت زیر ارائه شود

$$Y_0[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[k+iK] \text{ with } -\left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor \leq k \leq \left\lfloor \frac{K-1}{2} \right\rfloor. \quad (1)$$

$Y_0[k]$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب K است، بنابراین کافی است که ما تنها به یک دوره تناوب آن نگاه کنیم.

اگر بخواهیم x(t) را از نمونه های آن بازسازی نماییم، باید ضرایب فوریه X[k] را بدانیم. اگر فرکانس نمونه برداری، معیار نایکوئیست را برآورده سازد، $(K > 2L), X[k+iK]$ ، تنها رای i=0 از صفر متفاوت است

$$Y_0[k] = X[k] \text{ with } -\left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor \leq k \leq \left\lfloor \frac{K-1}{2} \right\rfloor. \quad (2)$$

هرچند معیار نایکوئیست برآورده نشود، $(K \le 2L)$، کپی ها طیف پیوسته در طیف نمونه برداری شده همپوشانی پیدا می کنند. در معادله (۱)، $X[k+iK]$ برای چندین مقدار i غیرصفر است و بنابراین ضرایب فوریه X[k] از سیگنال پیوسته نمی تواند فوراً به دست آید.

حال ما مجموعه دوم (منظم) از نمونه های $y_1[n]$ را در همان نرخ نمونه برداری K، با یک انحراف مجهول t1 از اولین مجموعه $y_0[n]$: $y_1[n] = x\left(\frac{n}{K}+t_1\right)$ با $t_1 \in [0,1)$ در نظر می گیریم. دوباره، ما می توانیم ضرایب فوریه آن $Y_1[k]$ را به عنوان تابع $X[k]$ در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} Y_1[k] &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} W_{t_1}^{k+iK} X[k+iK] \\ &= W_{t_1}^{k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} W_{t_1}^{iK} X[k+iK], \end{aligned} \qquad (3)$$

با $W_\alpha = e^{j2\pi\alpha}$ و $-\lfloor K/2 \rfloor \le k \le \lfloor (K-1)/2 \rfloor$. این به ما، K معادله جدید را در X[k] می دهد، اما t1 مجهول جدید را می افزاید.

ما می توانیم معادله (1) و (۳) را با استفاده از نمایش برداری و با استفاده از دوره تناوب از ۰ تا K-1 به جای K/2 – تا K/2 دوباره فرمول نویسی نماییم.

$$\begin{bmatrix} Y_m[0] \\ Y_m[1] \\ \vdots \\ Y_m[K-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{t_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_{t_m}^{K-1} \end{bmatrix} \sum_{i=-\infty}^{\infty} W_{t_m}^{iK} \begin{bmatrix} X[iK] \\ X[iK+1] \\ \vdots \\ X[(i+1)K-1] \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{Y}_m = \mathbf{D}_m \sum_{i=-\infty}^{\infty} W_{t_m}^{iK} \mathbf{X}_{iK}^{(i+1)K-1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbf{D}_m^{-1}\mathbf{Y}_m = \sum_{i=-\infty}^{\infty} W_{t_m}^{iK} \mathbf{X}_{iK}^{(i+1)K-1}, \qquad (4)$$

با tm، انحراف نسبی از مجموعه $y_0[n]\ (t_0 = 0)$ و m، شاخص مجموعه نمونه ها $(0 \leq m < M)$. چون

سیگنال اصلی x(t) باند محدود است، $\mathbf{X}_{iK}^{(i+1)K-1} \neq 0$ تنها برای تعداد متناهی S از مقادیر i:

$$-\left\lfloor \frac{L+K-2}{K} \right\rfloor \leq i \leq \left\lfloor \frac{L-1}{K} \right\rfloor \qquad (5)$$

با [x] به عنوان بزرگترین مقدار عدد صحیح کمتر از x. این برای ما، محاسبه S را به صورت زیر میسر می سازد:

$$S = \left\lfloor \frac{L+K-2}{K} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{L-1}{K} \right\rfloor + 1. \qquad (6)$$

ما می توانیم در حال حاضر ببینیم که مجموعه های اصلاح شده از نمونه های $\mathbf{D}_m^{-1}\mathbf{Y}_m$، همه و همه ترکیبات خطی از مجموعه ای از بردارهای S ، $\mathbf{X}_{iK}^{(i+1)K-1}$ هستند.به طرز جالبی، می توان دید که با اتخاذ تعداد مجموعه های نمونه برداری M که به اندازه کافی بزرگ باشد، ما معادلات کافی برای محاسبه ضرایب فوریه X[k] و انحراف های مجهول tm را خواهیم داشت.

۳. حل با استفاده از شبه فضاها

۳,۱ تخمین انحراف

همانطور که قبلاً ذکر شد، مجموعه های اصلاح شده از ضرایب فوریه در نمونه ها، ترکیبات خطی از s بردار $\mathbf{X}_{iK}^{(i+1)K-1}$ هستند. بنابراین، آنها معتلق به یک شبه فضای S بعدی از فضای K بعدی و ماتریس شبه فضا هستند.

$$\mathbf{Y} = \left[\ \mathbf{Y}_0 \quad \mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{Y}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{D}_{M-1}^{-1}\mathbf{Y}_{M-1}\ \right] = \begin{bmatrix} Y_0[0] & Y_1[0] & \cdots\ Y_{M-1}[0] \\ Y_0[1] & W_{t_1}Y_1[1] & \cdots\ W_{t_{M-1}}Y_{M-1}[1] \\ Y_0[2] & W_{t_1}^2 Y_1[2] & \cdots\ W_{t_{M-1}}^2 Y_{M-1}[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_0[K-1] & W_{t_1}^{K-1}Y_1[K-1] & \cdots\ W_{t_{M-1}}^{K-1}Y_{M-1}[K-1] \end{bmatrix} \qquad (7)$$

دارای رتبه S است (اگر $M \geq S$). ما فرض می کنیم که این رتبه کمتر از S نیست، به این معنی که دو مجموعه از نمونه ها با انحراف t_i, t_j وجود ندارد که $(t_i - t_j)K \in \mathbb{Z}$. این یک مورد تبهگن است، زیرا دو مجموعه بدین شکل شامل تعداد نمونه یکسان می شوند.

اگر تعداد مجموعه های نمونه برداری M مینیمم S+1 باشد، امکان یافتن انحرافات نسبی به عنوان مجموعه های مقادیر پارامتری وجود دارد که برای آن (S+1)- مقدار ویژه Y برابر صفر است.

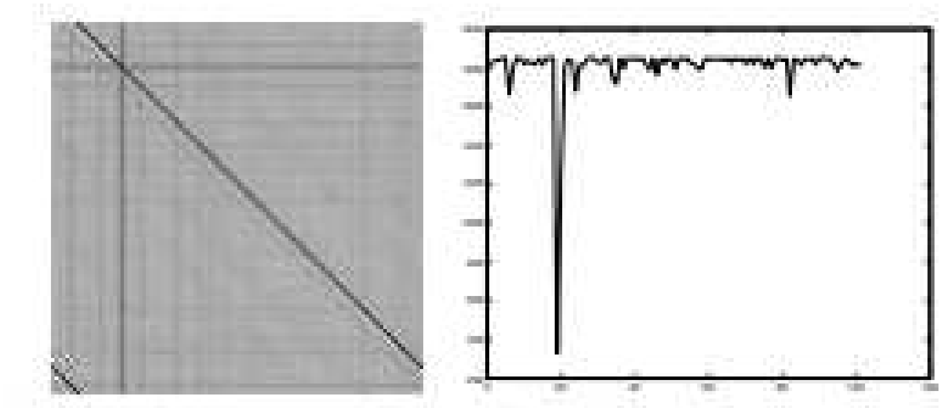
3.2. محاسبه ضرایب فوریه

هنگامی که انحرافات tm نسبی شناخته شده باشد، محاسبه فوریه ضرایب X [K] از سیگنال اصلی بسیار آسان است. هر یک از معادلات در (۳)، یک معادله در بیشتر S ضرایب فوریه مجهول است. از آنجا که ما دارای $M \geq S+1$ مجموعه از نمونه ها هستیم، همچنین S + 1 از این معادلات در همان مجهولات وجود دارند. بنابراین، ضرایب فوریه مجهول، راه حل مجموعه معادلات خطی است.

4. تفسیر

ماتریس های مجهول D_m^{-1} که بردار YM در آن ضرب می شود، ماتریس چرخش می باشد. آنها انرژی در بردار های مختلف (یا به طور برابر ، هنجار Frobenius از ماتریس Y) را تغییر نمی دهند، بلکه آنها بردارهای مختلف را همراستا می کنند به طوری که آنها در فضای S بعدی گنجانده می شوند.

همانطور که در بخش ۳ شرح داده شده است، ما به دنبال $t_2, \ldots, t_{M-1}$ هستیم که در آن (S + 1) مقدار ویژه ، ۰ است . بعد از مینیمم کلی، این تابع نیز دارای بسیاری از مینیمم های محلی است. استفاده از یک الگوریتم برای به مینیمم رساندن استاندارد (مانند گرادیان نزولی) برای این مشکل ممکن نیست، به دلیل آن که یکی از کمینه های محلی گیر خواهد کرد. یک احتمال، محاسبه مقدار ویژه (S +1) ام بر روی یک شبکه منظم از Ks مقدار و اعمال یک الگوریتم برای مینیمم نمودن غیر خطی برای مینیمم آن مقادیر است. بدیهی است، برای مقادیر بزرگ S ، این کار غیرعملی است.



(a) تغییرات روی دو انحراف . (b) تغییرات روی یک انحراف.

شکل ۱ . مقدار ویژه سوم برای انحرافات مختلف با S = 2 (مقادیر مختلف برای دو انحراف (a) و مقادیر مختلف برای انحراف دوم در صورتی که برای اولین بار شناخته شده باشد (b) . این تابع دارای بسیاری از مینیمم های محلی است که پیدا کردن مینیمم کلی دشوار است. سطح خاکستری، این مقدار را نشان می دهد (سفید مخفف مقادیر بالا و سیاه مخفف صفر است). این مقادیر برای مقاصد نمایش به صورت کوچک مقیاس بندی شده اند.

از این رو درک ساختاری که در این تابع چند متغیره حاضر است، بسیار مهم است. همانطور که ما به مقدار ویژه S) (1 +ام به عنوان یک تابع از tm متفاوت (برای مثال با S = 2 شکل ۱) نگاه می کنیم، می توانیم خطوط افقی، عمودی و مورب متمایز را که از طریق مینیمم کلی در تقاطع خطوط افقی، عمودی و مورب قرار دارند، ببینیم. این خطوط متناظر با همراستایی Y0وY1 ، Y0وY2 ، Y1و Y2 هستند. همانطور که این خطوط را می توان در نمودارها مشاهده نمود، آنها نشان می دهد که آن پیدا کردن بسیاری از ثبت های دو به دو به طور مستقل ، با استفاده از مقادیر دلخواه برا t_m's. دیگر اغلب ممکن است.

۵. موضوعات محاسباتی

۵,۱ تخمین انحراف

مینیم نمودن مقدار ویژه (S+1)ام Y می تواند به عنوان جستجویی برای مقادیر t_m $(m = 1, 2, ..., S)$ دیده شود که برای آن

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{Y}^*\mathbf{Y} \\
&= \begin{bmatrix}
\mathbf{Y}_0^*\mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_0^*\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{Y}_1 & \cdots & \mathbf{Y}_0^*\mathbf{D}_M^{-1}\mathbf{Y}_M \\
\mathbf{Y}_1^*\mathbf{D}_1^{*-1}\mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_1^*\mathbf{Y}_1 & \cdots & \mathbf{Y}_1^*\mathbf{D}_1^{*-1}\mathbf{D}_M^{-1}\mathbf{Y}_M \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{Y}_M^*\mathbf{D}_M^{*-1}\mathbf{Y}_0 & \mathbf{Y}_M^*\mathbf{D}_M^{*-1}\mathbf{D}_1^{-1}\mathbf{Y}_1 & \cdots & \mathbf{Y}_M^*\mathbf{Y}_M
\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

کمبود مرتبه است. به جای محاسبه مقادیر ویژه، می توانیم به سادگی دترمینان A را نیز محاسبه نماییم. این نیاز به محاسبات کمتری دارد، اما از نظر عددی کمتر پایدار خواهد بود، زمانی که ما از تمام اطلاعات دردسترس استفاده نکنیم.

یک راه حل با ثبات تر، محاسبه کوچکترین مقدار ویژه A، و به این ترتیب کوچکترین مقدار ویژه آنها با استفاده از روش توان معکوس به صورت توصیف شده در [۵] است. با توجه به این واقعیت که مقدار ویژه (S + 1) ام بسیار کمتر از مقدار ویژه- S ام است، این روش همگرایی بسیار سریع است. این روش تنها نیاز به چند تکرار دارد که در آن یک سیستم خطی با ماتریس A باید حل شود.

۵,۲ محاسبات ضرایب فوریه

مجموعه معادلاتی که از آن ضرایب فوریه محاسبه می شوند، به طور کلی بیش از حد مشخص شده است. بنابراین، استفاده از راه حل حداقل مربعات معادلات بهتر است. این راه حلی بهینه است، زمانی که اندازه گیری ها با نویز گوسی اضافی خراب می شود.

فرض ما بر اینست که مقادیر مرتبط با انحراف (tm مد 1/K) به طور یکنواختی روی بازه $[0, 1/K)$. گسترده است. این بدین معنی است که تمام مجموعه نمونه های Ym تقریباً در یک موقعیت هستند، زیرا این یک مسئله بازسازی را به وجود می آورد. نمونه ها به طور متناوب بسیار نزدیک به یکدیگر هستند که فاصله های خالی را بدون هیچ اطلاعاتی در میان خود می گذارند.

۶. کاربرد: فرا راه حل

تصویرسازی فرا راه حل، یکی از کاربردهای نوعی است که ما در مورد آن می اندیشیم. هدف از فرا راه حل، بازسازی یک تصویر با رزولوشن بالا از یک مجموعه از تصاویر با رزولوشن پایین از همان صحنه است [6]. اگر تصاویر با رزولوشن پایین خراب شوند (که نوعاً در صورتی رخ می دهد که هیچ پردازش خاصی انجام نشود)، می توانیم الگوریتم خود را برای آن اعمال کنیم.

ایده توصیف شده برای سیگنال های تک بعدی در بخش های قبلی می تواند به آسانی به دو بعد گسترش یابد (یا بیشتر). انحراف در حال حاضر یک ترکیب از شیفت افقی و عمودی بین تصاویر است. البته، موضوعات محاسباتی ذکر شده در بخش ۵ در اینجا زمانی مهم تر خواهد شد که تعداد حداقل تصاویر برای یک تصویر درهم پنج تا باشد، به جای سه که برای سیگنال های تک بعدی است. یک نتیجه از این الگوریتم در شکل ۲ نشان داده شده است.

شکل ۲. نتایج الگوریتم با رزولوشن عالی. تصویر اورجینال (۲۲۵*۲۲۵) به طور کامل از (راست) یک مجموعه از تصاویر (۱۲۸*۱۲۸) با رزولوشن پایین به تعداد پنج عدد (سمت چپ) بازسازی شده است.

۷. بررسی و کارهای آینده

الگوریتم توصیف شده در بالا میتواند برای هر نوع سیگنال باند محدود درهم اعمال شود که برای آن، مجموعه های مختلف از نمونه ها می توانند گرفته شوند. عامل نمونه برداری ضعیف می تواند از تغییر مقادیر مختلف ویژه برای ماتریس اندازه گیری اصلاح شده تخمین زده شود. ما میتوانیم یک ماتریس را از تمام مجموعه های نمونه برداری شده بسازیم، تجزیه مقادیر ویژه را برای انحرافات مختلف محاسبه کنیم و کنترل کنیم که $S\ \sigma_S \gg \sigma_{S+1}$.

این کار تعداد مینیمم مجموعه های نمونه برداری مورد نیاز را برای تخمین انحراف و بازسازی سیگنال را تعیین می کند.

همانطور که قبلاً بیان شد، این ایده به طور کلی متکی بر حضور انرژی سیگنال فراتر از فرکانس نایکوئیست در سیگنال اندازه گیری شده است. اگر این انرژی سیگنال (ناهمواری) از سیگنال، قبل از اندازه گیری حذف شود، اطلاعات به طور غیرقابل درمانی گم می شود و الگوریتم هیچ بهبودی را به ارمغان نمی آورد.

واقعی ترین سیگنال ها، متناوب نیستند، بلکه دارای گستره ای متناهی هستند (یا آنها روی گستره ای متناهی نمونه برداری می شوند). روش ما میتواند هنوز برای چنین سیگنال هایی با استفاده از گسترش متناوب سیگنال ها اعمال شود. در این مورد، بخش های غیرهمپوشانی کننده در مرزها وجود دارد. مطالعه عملکرد روش ما برای مقادیر مختلف همپوشانی بین سیگنال هایمختلف بسیار جالب خواهد بود.

روشما، تحت شرایط نویزدار به خوبی عمل می کند. این انتظار می رود، همانطو رکه تجزیه مقدار ویژه، یک الگوریتم است که بسیار حساس به نویز نیست. با استفاده از روش حداقل مربعات، همین اتفاق برای بازسازی رخ می دهد. این عدم حساسیت به نویز در عمل مهم است، زمانی که تقریباً تمام اندازه گیری های سیگنال توسط نویز مختل می شود.

در سراسر این مقاله، ما نمونه برداری را با استفاده از یک تابع نمونه برداری دیراک فرض نمودیم. هیچ پاسخ ضربه یا تابع گستره نقطه ای در نظر گرفته نشد. این یک تخمین خوب برای سیستم واقعی است، تا زمانی که سیگنال ها در موقعیت های دقیق نمونه برداری شوند (نسبتاً). تا زمانی که پاسخ ضربه مهم باشد (مثلاً) ما نیاز به در نظر گرفتن آن داریم. این کار می تواند توسط ضرب نمودن X[k] در H[k] در تمام معادلات انجام شود. اثر تابع نمونه برداری می تواند در انتها با تقسیم نتیجه بر H[k] حذف شود. البته، اگر تابع نمونه برداری بسیار هموار باشد. سیگنال با فیلتر پایین گذر، فیلتر می شود و تمام ناهمواری از سیگنال اندازه گیری شده حذف میشود.

بیشتر کارها باید روی بازده محاسباتی الگوریتم انجام شود. از طرف دیگر، این الگوریتم به ندرت، مینیمم کلی پیدا می کند، اگر فوراً از یک موقعیت دلخواه بدون ارزیابی اولیه در تعداد معینی از مقادیر آغاز شود. از طرف دیگر، با

استفاده از یک جستجوی جامع، این الگوریتم، اگر بخواهیم به جستجوی جابجایی های پیوسته به صورت جامع بپردازیم، نیاز به محاسبات بسیار شدید دارد.

۸. نتایج

ما یک رویکرد حوزه فرکانسی جدید را برای بازسازی سیگنال ها از چندین مجموعه از نمونه های دارای همپوشانی ارائه دادیم. مجموعه نمونه ها منظم هستند، اما انحراف بین مجموعه های مختلف مجول است. این انحراف ابتدا با استفاده از رویکرد شبه فضا محاسبه می شود. بعد از آن، ضرایب فوریه سیگنال اصلی می توانند از مجموعه ای از معادلات خطی حل شوند. برخی موضوعات محاسباتی برای اجتناب از به دام افتادن راه حل ها در مینیمم محلی و برای بهبود بازده محاسباتی باید هدایت شوند. بنابراین این ایده ها برای تصویرسازی راه حلی عالی اعمال می شوند. نتایج، نشاندهنده اعتبار روش است.

9. REFERENCES

[1] Martin Vetterli, Pina Marziliano, and Thierry Blu, "Sampling signals with finite rate of innovation," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 6, pp. 1417–1428, June 2002.

[2] P. P. Vaidyanathan, "Sampling theorems for non bandlimited signals: theoretical impact and practical applications," in *Proceedings 4th International Conference on Sampling Theory and Applications*, May 2001.

[3] Michael Unser, "Sampling—50 Years after Shannon," *Proceedings of the IEEE*, vol. 88, no. 4, pp. 569–587, April 2000.

[4] Pina Marziliano and Martin Vetterli, "Reconstruction of irregularly sampled discrete-time bandlimited signals with unknown sampling locations," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 12, pp. 3462–3471, December 2000.

[5] Gilbert Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Saunders College Publishing, third edition, 1988.

[6] Sung Cheol Park, Min Kyu Park, and Moon Gi Kang, "Super-resolution image reconstruction: A technical overview," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 20, no. 3, pp. 21–36, May 2003.