



ارائه شده توسط:

سایت ترجمه فا

مرجع جدیدترین مقالات ترجمه شده

از نشریات معتبر

# تحلیل رویکرد مسئله الحاقی برای شناسایی ضریب انتشار مجهول

## چکیده

یک مسئله معکوس برای شناسایی ضریب مجهول در یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی شبه خطی در نظر گرفته می شود. ما یک رویکرد مبتنی بر استفاده از نسخه های الحاقی مسئله مستقیم را به منظور استنتاج معادلات به صراحت مرتبط با تغییر در ورودی ها (ضرایب) برای تغییرات در خروجی (داده های اندازه گیری شده) ارائه می کنیم. با استفاده از این معادلات این امکان وجود دارد تا نشان داده شود که ضریب برای نگاشت داده ها، پیوسته، به شدت یکنواخت و تزریقی هستند. این معادلات، بیشتر برای ساخت یک راه حل تقریبی برای مسئله معکوس و تجزیه و تحلیل خطا در تقریب مورد استفاده قرار می گیرند. در نهایت، نتایج برخی از آزمایشات عددی نمایش داده می شود.

## ۱. مقدمه

استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای مدلسازی سیستم های فیزیکی، یکی از قدیمی ترین فعالیت ها در ریاضیات کاربردی است. یک مدل کامل نیاز به ورودی های خاص حالت به شکل اولیه و / یا داده های مرزی دارد، همراه با آنچه که ممکن است ورودی های ساختار نامیده شود، مانند اصطلاحات ضرایب یا منبع که مربوط به خواص فیزیکی سیستم هستند. دستیابی به یک راه حل منحصر به فرد مربوط به مسئله به خوبی مطرح شده به منزله چیزی است که ما حل مسئله مستقیم می نامیم. حل مسئله مستقیم امکان محاسبه خروجی های مختلف سیستم فیزیکی مورد نظر را فراهم می سازد. از سوی دیگر، زمانی که برخی از ورودی های مورد نیاز در دسترس نباشند، ممکن است به جای آن، ما قادر به تعیین ورودی های از دست رفته از خروجی هایی باشیم که اندازه گیری می شوند نه اینکه توسط فرموله کردن و حل مسئله مناسب معکوس محاسبه شوند. به طور خاص، هنگامی که ورودی های از دست رفته یک یا چند ضریب مجهول در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند، این مسئله،

مسئله شناسایی ضریب نامیده می شود. شناسایی ضریب نفوذ در یک معادله انتشار شبه خطی در اینجا به عنوان مسئله شناسایی ضریب نمونه انتخاب می شود که با استفاده از روش های مختلف با آن برخورد می شود.

رایج ترین روش برای تعیین ضریب مجهول از برخی از خروجی های اندازه گیری شده، روش حداقل مربعات خروجی است (1) [OLS, 4, 8-10]. در اینجا ضریب مجهول،  $C$ ، از فضای مناسب انتخاب می شود و خروجی،  $\Phi[C]$ ،

با حل مسئله مستقیم محاسبه می شود. یکی خطای تابعی،  $J[C] = \|\Phi[C] - f\|_F^2$ ، را با مقایسه خروجی

محاسبه شده با مقدار اندازه گیری شده،  $f$ ، در هنجار فضای خروجی،  $F$ ، تعریف می کند و به دنبال به حداقل رساندن  $J$  روی  $K$  است. روش های OLS بسیار عمومی است و می تواند به طور موثر برای اجرای کامپیوتر برنامه نویسی شود.

معمولاً مشکلاتی در مورد فقدان منحصر به فرد بودن، همگرایی حداقل خطا و بی ثباتی تحت پالایش مش پارامتر وجود دارد، اگر چه یک کاربر ماهر ممکن است به منظور کاهش برخی از این مشکلات، قادر به ترکیب اطلاعات

پیشین در مورد راه حل در شرح پارامتری ضریب مجهول باشد [۹ ۱]. از آنجا که ارتباط بین ورودی ها و خروجی ها تنها به طور غیر مستقیم از طریق حل کننده بیان می شود، اطلاعات عمومی در مورد نگاشت ورودی به خروجی

توسط روش های OLS به راحتی در دسترس نمی باشد.

یک جایگزین برای شناسایی ضریب توسط حداقل مربعات خروجی، به اصطلاح روش خطای معادله نامیده می شود.

[۳، ۶، ۷، ۱۱، ۱۲]. در اینجا مشخصات زیاد اندازه گیری شده به عنوان ورودی برای معادله دیفرانسیل در مسئله

مستقیم استفاده می شود که پس از آن به عنوان یک معادله برای ضریب مجهول در نظر گرفته می شود. این معادله

بیانگر یک رابطه مستقیم بین مقادیر ضریب مجهول و مقادیر اندازه گیری شده داده ها است. از آنجا که این رابطه

اغلب کاملاً پیچیده است، تشخیص از آن از خواص نگاشت ورودی به خروجی آسان نیست. روش های خطای معادله

کاملاً وابسته به مسئله و درجات مختلفی از موفقیت است.

روش شرح داده شده در این مقاله بر اساس معادله انتگرالی در رابطه با تغییرات در ضریب مجهول برلی تغییرات

مربوطه در خروجی اندازه گیری شده است. این معادله انتگرالی با بهره گیری از یک مسئله نتیجه می شود که الحاقی

به مشکل مستقیم است، یک ایده نزدیک به تکنیک های اغلب مورد استفاده قرار گرفته به منظور برآورد حساسیت

در روش OLS [8]، [9]. با این حال، این معادله انتگرالی، اطلاعاتی در مورد نگاشت ورودی / خروجی خود را به جای خطای عملکردی فراهم می کند. بنابراین اثبات این مورد ممکن است که نگاشت ورودی به خروجی پیوسته ، یکنواخت و تزریقی باشد. علاوه بر این، نشان داده شده است که هنگامی که نگاشت ورودی / خروجی محدود به یک (بعد محدود) فضا از ضرایب چند ضلعی شود، به صراحت معکوس پذیر است. این مشاهدات پایه و اساسی را برای یک روش برای تخمین عددی ضریب مجهول فراهم می کند. نشان داده شده است که یک تقریب منحصر به فرد چند ضلعی برای ضریب مجهول با حل یک سیستم مثلثی از معادلات جبری خطی به دست می آید. تخمین های خطا نشان می دهد که دقت و صحت تقریب با دقت اندازه گیری داده ها محدود می شود، به طوری که یک دقت قابل دسترسی مطلوب را اما تعیین دقیق ضریب هرگز ممکن نیست.

نتایج حاصل از چند آزمایش عددی ارائه شده در اینجا برای نشان دادن کارکرد این روش است. ارائه گسترده تر از آزمایش های عددی بعداً منتشر خواهد شد.

## ۲. تجزیه و تحلیل مسائل مستقیم و معکوس

IBVP زیر را برای معادله انتشار/هدایت شبه خطی در دامنه  $Q_T = \{0 < x < 1, 0 < t < T\}$  را در نظر

بگیرید

$$\begin{aligned} \partial_t u(x, t) &= \partial_x (D(u) \partial_x u(x, t)) = \partial_{xx} B(u(x, t)) && \text{on } Q_T, \\ u(x, 0) &= f(0) && 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= f(t) && \partial_x u(1, t) = 0 \quad 0 < t < T. \end{aligned} \quad (2.1)$$

در اینجا

و فرض می کنیم

$$f \in C^1[0, T] \quad \text{and} \quad f'(t) > 0 \quad \text{for } t > 0. \quad (2.2)$$

برای  $f$  که  $(2,2)$  را برآورده می سازد، در نظر می گیریم  $J = [f(0), f(T)]$ ، و سپس فرض می کنیم که

برای ثوابت مثبت،  $D_* \leq D^*$  and  $K$ ،

$$\begin{aligned}
D_* \leq D(u) \leq D^* & \quad \text{for } u \in J, \quad (i) \\
|D(\mu_2) - D(\mu_1)| \leq K|\mu_2 - \mu_1| & \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in J. \quad (ii)
\end{aligned}
\tag{2.3}$$

توجه کنید که هر تابع چندضلعی (یعنی توابع خطی خط تکه ای و پیوسته) (2.3i) را برآورده می سازد و اینکه هر

تابع برآورده کننده هر دو شرط (۲,۳) از صفر محدود می شود و تقریباً دارای چند صفر روی  $J$  است.

با توجه به  $f$  که (۲,۲) را برآورده می سازد و  $D(u)$  که (۲,۳) را برآورده می سازد، مسئله مستقیم نامبرده (۲,۱) دارای یک راه حل ضعیف منحصر به فرد  $u = u(x,t)$  است که معادلات زیر را برآورده می سازد.

$$\begin{aligned}
u & \in L^2[0, T : H^1(0, 1) \cap C[0, T : L^2(0, 1)], \\
\partial_t u & \in L^2[0, T : H^{-1}(0, 1)].
\end{aligned}$$

در اینجا ما مسئله معکوس را در نظر می گیریم که در آن ضریب  $D = D(u)$  باید از داده های اندازه گیری شده خروجی شناسایی شود.

$$g(t) = -D(u(0, t))\partial_x u(0, t) \quad \text{or} \quad h(t) = u(1, t) \quad 0 < t < T.$$

اگر ما کلاس مثبت یکنواخت را نشان دهیم، ضرایب  $D$  Lipschitz که (۲,۳) را توسط  $W(J)$  برآورده می سازد، بنابراین برای یک  $f$  ثابت که (۲,۲) را برآورده می سازد، می توانیم نگراشت های زیر را تعریف کنیم

$$\begin{aligned}
\Phi \text{ and } \Psi & : W(J) \longrightarrow L^2[0, T], \\
\Phi[f, D] & = g, \\
\Psi[f, D] & = h,
\end{aligned}$$

که به یک  $D$  از  $W(J)$  منصوب می شود، داده های شار،  $g$ ، یا داده های مقدار تابع،  $h$ ، که توسط حل مسئله مستقیم (۲,۱) با ورودی های  $f$  و  $D$  به دست آمده است. بنابراین، حل مسئله معکوس برای مقاردهی معکوس نمودن این نگراشت ها خواهد بود.

ما با نتیجه (2.1) IBVP آغاز می کنیم.

لم ۲,۱ فرض کنید که  $f$  و  $D$  (۲,۲) و (۲,۳) را برآورده می کند و در نظر بگیرید که  $u = u(x,t)$  نشاندهنده راه حل متناظر (۲,۱) باشد، آنگاه

- (a) for each  $t \in (0, T)$ ,  $f(0) \leq u(x, t) \leq f(t)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  
 (b)  $\partial_x u(x, t) < 0$  a.e. on  $Q_T$ .

اثبات از (۲,۱) داریم که

$$\begin{aligned} \partial_t [f(t) - u(x, t)] - \partial_{xx} [B(f(t)) - B(u(x, t))] &= f'(t) \quad \text{on } Q_T, \\ f(0) - u(x, 0) &= 0 \quad 0 < x < 1, \\ f(t) - u(0, t) &= 0 \quad 0 < t < T, \\ \partial_x [f(t) - u(1, t)] &= 0 \quad 0 < t < T. \end{aligned}$$

بنابراین، ما معادله را در تابع آزمون دلخواه  $\psi(x, t)$  ضرب می کنیم و انتگرال می گیریم

$$\begin{aligned} - \int \int_{Q_T} [(f - u)\partial_t \psi + (B(f) - B(u))\partial_{xx} \psi] dx dt + \int_0^1 (f - u)\psi \Big|_{t=0}^{t=T} dx \\ - \int_0^T [\psi \partial_x (B(f) - B(u)) - (B(f) - B(u))\partial_x \psi] \Big|_{x=0}^{x=1} dt \\ = \int \int_{Q_T} f'(t)\psi dx dt. \end{aligned}$$

توجه کنید که

$$B(f(t)) - B(u(x, t)) = k(x, t)(f - u),$$

که در آن ما  $k(x, t) = D(\mu(x, t))$  را برای  $u(x, t)$  بین  $f(t)$  و  $u(x, t)$  تعریف می کنیم

سپس ما  $\psi(x, t)$  را برای حل مسئله الحاقی نیاز داریم

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(x, t) + k(x, t)\partial_{xx} \psi(x, t) &= F(x, t) \quad \text{in } Q_T, \\ \psi(x, T) &= 0 \quad 0 < x < 1, \\ \psi(0, t) &= 0 \quad \partial_x \psi(1, t) = 0 \quad 0 < t < T, \end{aligned}$$

برای تابع هموار،  $F(x, t)$ . آنگاه عبارت انتگرال به معادله زیر کاهش می یابد

$$- \int \int_{Q_T} (f - u)F(x, t) dx dt = \int \int_{Q_T} f'(t)\psi(x, t) dx dt. \quad (2.4)$$

همواری  $k(x,t)$  و  $F(x,t)$  نشان می دهد که اصل ماکزیمم قوی می تواند برای مسئله الحاقی برای این نتیجه گیری اعمال شود که اگر تابع  $F(x,t)$  در  $Q_T$  مثبت باشد، بنابراین  $\psi(x,t) < 0$  در  $Q_T$ . چون  $f(2,2)$  را برآورده می سازد، داریم که برای هر تابع  $F(x,t)$  که در  $Q_T$  مثبت است، سمت راست  $(2,4)$  منفی است که برای هر  $F(x,t)$  هموار در  $Q_T$  مثبت است.

$$\int \int_{Q_T} (f - u)F(x,t) dx dt > 0.$$

اما این تنها اطمینان است که  $f(t)-u(x,t)$  در توزیعات روی  $Q_T$  مثبت است. با توجه به همواری راه حل  $x(u,t)$  بدین معنی است که  $f(t) > u(x,t)$  تقریباً در هر جایی روی  $Q_T$  است. با اعمال همین استدلال برای  $u(x,t)-f(0)$  به عبارت زیر می رسیم.

$$-\int \int_{Q_T} (u(x,t) - f(0))F(x,t) dx dt = \int_0^T B(f(t))\partial_x \psi(0,t) dt.$$

که در آن ما از  $\psi(x,t) < 0$  در  $Q_T$  استفاده می کنیم اگر تابع  $F(x,t)$  در  $Q_T$  مثبت باشد. حال این حقیقت، به همراه شرایط مرزی الحاقی، نشان می دهد که  $\partial_x \psi(0,t) < 0$  برای  $0 < t < T$ . بنابراین، این نتیجه مانند قبل را داریم. این اثبات (a) را کامل می کند.

برای اثبات (b)، هر دو طرف  $(2,1)$  را در  $\partial_x \phi(x,t)$  برای یک تابع از مومن دلخواه  $\phi(x,t)$  ضرب کنید و از انتگرال برای رسیدن به عبارت زیر استفاده کنید

$$0 = \int \int_{Q_T} \partial_x u [\partial_t \phi + D(u)\partial_{xx} \phi] dx dt + \int_0^T \phi \partial_t u|_{x=0}^{x=1} dt - \int_0^1 \phi \partial_x u|_{t=0}^{t=T} dx - \int_0^T \partial_x \phi \partial_x B(u)|_{x=0}^{x=1} dt.$$

حال نیاز داریم که  $\phi(x,t)$  مسئله الحاقی را برآورده سازد

$$\partial_t \phi(x, t) + D(u(x, t)) \partial_{xx} \phi(x, t) = F(x, t) \quad \text{in } Q_T,$$

$$\phi(x, T) = 0 \quad 0 < x < 1,$$

$$\partial_x \phi(0, t) = 0 \quad \phi(1, t) = 0 \quad 0 < t < T.$$

بنابراین عبارت انتگرال قبلی به عبارت زیر کاهش می یابد

$$\int \int_{Q_T} \partial_x u(x, t) F(x, t) dx dt = \int_0^T \phi(0, t) f'(t) dt.$$

اصل ماکزیمم می تواند برای مسئله الحاقی برای این نتیجه اعمال شود که در  $Q_T$   $\phi(x, t) < 0$  اگر تابع

پیوسته  $F(x, t)$  در  $Q_T$  مثبت باشد. به طور خاص، برای  $0 < t < T$ ،  $\phi(0, t) < 0$  و چون  $f$  (۲,۲) را برآورده می

سازد، داریم که برای هر تابع  $F(x, t)$  که در  $Q_T$  مثبت است، سمت راست این عبارت منفی است. بنابراین همانند

$$\text{اثبات در (a) داریم که تقریباً در هر جا در } Q_T, \partial_x u(x, t) < 0.$$

نتایج این لم برای اثبات زیر حیاتی هستند

لم ۲,۲ فرض کنید  $f$  (۲,۲) را برآورده سازد و  $D_1, D_2$  هر دو، (۲,۳) را برآورده سازند. بنابراین اگر  $D_1(u) > D_2(u)$

برای  $u \in J = [f(0), f(T)]$  داریم

$$(a) \Phi[f, D_1](t) > \Phi[f, D_2](t) \quad 0 < t < T,$$

$$(b) \Psi[f, D_1](t) < \Psi[f, D_2](t) \quad 0 < t < T.$$

اثبات: برای  $w \in J$ ، در نظر بگیرید که  $B'_j(w) = D_j(w)$ ،  $j = 1, 2$ ، و در نظر بگیرید که

$u_1, u_2$  نشاندهنده جواب ها برای مسئله مستقیم با ضرایب  $D_1, D_2$  به ترتیب باشد. بنابراین

$$\partial_t(u_1 - u_2) - \partial_{xx}(B_1(u_1) - B_1(u_2)) = \partial_{xx}(B_1(u_2) - B_2(u_2)),$$

و برای یک تابع از مومن دلخواه  $\phi = \phi(x, t)$ ، و  $\tau, 0 < \tau \leq T$ ، دلخواه



$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 [\partial_t(u_1 - u_2) - \partial_{xx}(B_1(u_1) - B_1(u_2))] \phi \, dx \, dt \\ = \int_0^\tau \int_0^1 \phi \partial_{xx}(B_1(u_2) - B_2(u_2)) \, dx \, dt. \end{aligned}$$

انتگرال را با اجزا در سمت چپ این معادله اعمال کنید.

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 [\partial_t(u_1 - u_2) - \partial_{xx}(B_1(u_1) - B_1(u_2))] \phi \, dx \, dt \\ = - \int_0^\tau \int_0^1 (u_1 - u_2) \{ \partial_t \phi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \phi \} \, dx \, dt + \int_0^1 (u_1 - u_2) \phi \Big|_{t=0}^{t=\tau} \, dx \\ - \int_0^\tau [\phi \partial_x (B_1(u_1) - B_1(u_2)) - \partial_x \phi (B_1(u_1) - B_1(u_2))] \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt, \end{aligned}$$

و در سمت راست نیز

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_0^1 \phi \{ \partial_{xx}(B_1(u_2) - B_2(u_2)) \} \, dx \, dt = \int_0^\tau [\phi \partial_x (B_1(u_2) - B_2(u_2))] \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt \\ - \int_0^\tau \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 \, dx \, dt, \end{aligned}$$

که در آن برای تمام  $(x, t) \in Q_\tau, \mu(x, t)$  بین  $u_1(x, t)$  و  $u_2(x, t)$  قرار می گیرد به طوری که برای

$$(x, t) \in Q_\tau$$

$$B_1(u_1(x, t)) - B_1(u_2(x, t)) = D_1(\mu(x, t)) [u_1(x, t) - u_2(x, t)].$$

بنابراین ما عبارت انتگرال زیر را به دست می آوریم

$$\begin{aligned} - \int_0^\tau \int_0^1 (u_1 - u_2) \{ \partial_t \phi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \phi \} \, dx \, dt + \int_0^1 (u_1 - u_2) \phi \Big|_{t=0}^{t=\tau} \, dx \\ - \int_0^\tau [\phi \partial_x (B_1(u_1) - B_2(u_2)) - \partial_x \phi (B_1(u_1) - B_1(u_2))] \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt \\ = - \int_0^\tau \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

شرایط مرزی و اولیه برای مسئله مستقیم سبب می شود تا این عبارت به صورت زیر در آید

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^\tau \int_0^1 (u_1 - u_2) \{ \partial_t \phi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \phi \} dx dt + \int_0^1 (u_1 - u_2)(x, \tau) \phi(x, \tau) dx \\
 & + \int_0^\tau \phi(0, t) \partial_x (B_1(u_1) - B_2(u_2)) dt - \int_0^\tau \partial_x \phi(1, t) [B_1(u_1) - B_1(u_2)] dt \\
 & = - \int_0^\tau \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

حال ما نیاز به تابع دلخواه  $\phi(x, t)$  برای حل مسئله الحاق- $g$  مصطلح داریم

$$\begin{aligned}
 \partial_t \phi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \phi &= 0 & \text{in } Q_\tau, \\
 \phi(x, \tau) &= 0 & 0 < x < 1, \\
 \phi(0, t) &= \theta(t) & 0 < t < \tau, \\
 \partial_x \phi(1, t) &= 0 & 0 < t < \tau,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

که در آن  $\theta(t) = F(\tau - t)$  و  $F$  هر تابعی است که  $(2,2)$  را برآورده سازد. بنابراین  $(2,5)$  به صورت زیر می شود

$$\int_0^\tau \theta(t) [g_1(t) - g_2(t)] dt = \int_0^\tau \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt. \tag{2.7}$$

یک آرگومان مشابه با مورد استفاده شده اثبات این لم، که برای  $(2,6)$  اعمال شده است، نشان می دهد که این فرض در مورد وروی الحاقی،  $\theta$ ، نشان می دهد که روی  $Qt$ ،  $\partial_x \phi(x, t) < 0$ ، چون روی  $Qt$ ،  $\partial_x u_2 < 0$  و

$D_1(u_2) > D_2(u_2)$  داریم که سمت راست آخرین عبارت مثبت است. چون  $(2,7)$  برای تمام

برقرار است به گونه ای که  $F$   $(2,2)$  را برآورده می سازد. داریم

$$g_1(t) - g_2(t) > 0 \quad \text{for } 0 < t < T,$$

یعنی

$$g_1(t) = \Phi[f, D_1](t) > \Phi[f, D_2](t) = g_2(t).$$

برای این درست بودن این مطلب، ابتدا توجه کنید که اگر  $D_1(u) > D_2(u)$  برای  $u \in J$ ، آنگاه وجود یک بازه  $(0, t_1)$  با  $g_1(t) < g_2(t)$  برای  $0 < t < t_1$  توسط (۲,۷) به سادگی توسط انتخاب  $\tau = t_1$  ممانعت می شود. بنابراین فرض کنید که  $t_2 > t > 0$  وجود دارد به گونه ای که  $g_1(t) \geq g_2(t)$  برای  $0 < t \leq t_1$  و  $g_1(t) < g_2(t)$  برای  $t_1 < t < t_2$ . بنابراین انتخاب  $\tau = t_2$  در (۲,۷) نشان می دهد که هر  $\theta(t)$  مجاز

$$\int_{t_1}^{t_2} \theta(t)[g_1(t) - g_2(t)] dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt + \int_0^{t_1} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt - \int_0^{t_1} \theta(t)[g_1(t) - g_2(t)] dt.$$

با اعمال برابری (۲,۷) با  $\tau = t_1$ ، دو عبارت آخر برای معادله قبلی ناپدید می شود. با فرض، سمت راست عبارت حاصل به طور محدود مثبت است، درحالیکه انتخاب مناسب  $\theta(t)$  سمت چپ را غیرمنفی می سازد. این (۲,۷) را نقض می کند.

حال فرض کنید که ما  $\phi$  را در (۲,۵) برای حل مسئله ای متفاوت از (۲,۶) انتخاب کنیم. این مسئله الحاقی-h نامیده می شود.

$$\begin{aligned} \partial_t \phi + D_1(\mu(x, t)) \partial_{xx} \phi &= 0 & \text{in } Q_\tau, \\ \phi(x, \tau) &= 0 & 0 < x < 1, \\ \phi(0, t) &= 0 & 0 < t < \tau \\ D(\mu(1, t)) \partial_x \phi(1, t) &= \beta(t) & 0 < t < \tau. \end{aligned} \quad (2.8)$$

در اینجا، انتخاب می کنیم  $\beta(t) = F(\tau - t)$  که در آن F هر تابع برآورده کننده (۲,۲) است. آنگاه (۲,۵) برابر می شود با

$$\int_0^\tau D(\mu(1, t)) \partial_x \phi(1, t) (u_1(1, t) - u_2(1, t)) dt = \int_0^\tau \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt$$

or

$$\int_0^\tau \beta(t) [h_1(t) - h_2(t)] dt = \int_0^\tau \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x \phi \partial_x u_2 dx dt. \quad (2.9)$$

در این مورد، فرضیه ها در مورد  $\beta(t)$  نشان می دهد که روی  $Qt$ ،  $\partial_x \phi(x, t) > 0$ ، زیرا  $\partial_x u_2 < 0$  و

$\forall u_2 \in J$ ، داریم که سمت راست (۲,۹) منفی است. چون این با

برای هر  $F$  برآورده کننده (۲,۲) برقرار است. داریم  $\beta(t) = F(\tau - t)$

$$\Psi[f, D_1](t) = u_1(1, t) < u_2(1, t) = \Psi[f, D_2](t) \quad \text{for } 0 < t < \tau.$$

با اتمام این استدلال در مورد قبلی می بینیم که این برای  $\tau \leq T$  برقرار است.

نتایج لم ۲,۲ اطمینان می بخشد که نگاشت های ورودی به خروجی  $\Phi$  and  $\Psi$  نگاشت های یکنواخت هستند.

دقیق تر از این، نگاشت  $\Phi$  همنواخت است در حالیکه  $\Psi$  یک نگاشت آنتی تون است.

حال فرض کنید که  $D_1(u_1)$  و  $D_2(u_1)$  دو ضریب هستند که دو (۲,۳) را برآورده می سازند. در نظر بگیرید که

$u_1(x, t)$  و  $u_2(x, t)$  نشاندهنده راه حل های (۲,۱) است زمانی که این ضریب به ترتیب  $D_1(u)$  و  $D_2(u)$  برای  $i$

$i = 1, 2$  در نظر بگیرید

$$g_i(t) = \Phi[f, D_i] \quad \text{and}$$

$$h_i(t) = \Psi[f, D_i] \quad 0 < t < T.$$

حال داده ها را در مسائل الحاقی (۲,۶) و (۲,۸) به صورت زیر انتخاب می کنیم

$$\phi(0, t) = \theta(t) = \frac{g_1(t) - g_2(t)}{\|g_1 - g_2\|_{L^2[0, T]}}, \quad \text{in (2.6)}$$

و

$$D_1(\mu(1, t)) \partial_x \psi(1, t) = \beta(t) = \frac{h_1(t) - h_2(t)}{\|h_1 - h_2\|_{L^2[0, T]}} \quad \text{in (2.8).}$$

که از (۲,۷) داریم

$$\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} \leq \left| \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \right|$$

$$\leq C \|D_1 - D_2\|_\infty,$$

و از (۲,۹) که

$$\|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]} \leq \left| \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \psi \, dx \, dt \right|$$

$$\leq C \|D_1 - D_2\|_\infty.$$

این تنها اطمینان است که  $\Phi$  and  $\Psi$  به عنوان تابعی از  $D$  از  $W(J)$  در  $L^2[0, T]$  پیوسته هستند. یعنی

$$\|g_1 - g_2\|_{L^2[0,T]} = \|\Phi(f, D_1) - \Phi(f, D_2)\|_{L^2[0,T]} \leq C \|D_1 - D_2\|_\infty,$$

$$\|h_1 - h_2\|_{L^2[0,T]} = \|\Psi(f, D_1) - \Psi(f, D_2)\|_{L^2[0,T]} \leq C \|D_1 - D_2\|_\infty.$$

با نشان دادن  $\Phi$  and  $\Psi$  که پیوسته و یکنواخت هستند، باور این مور تقویت می شود که این مسئله معکوس

مشکل ندارد و اینکه  $\Phi$  and  $\Psi$  می تواند به طور پیوسته قابل معکوس کردن باشد. چنین نتیجه قوی بدون یک

مرتب بندی ساده در حوزه و گستره این نگاشت ها، به نظر نامحتمل می رسد، اما حداقل این مورد درست است که

نگاشت های ورودی/خروجی  $\Phi$  and  $\Psi$  به صورتی که لم زیر نشان می دهد، تزریقی هستند.

لم ۲,۳. برای یک  $f$  ثابت که (۲,۲) را برآورده می سازد و ضرایب  $D_1, D_2 \in W(J)$  در نظر بگیرید که

$$g_k(t) = \Phi[f, D_k] \text{ و } h_k(t) = \Psi[f, D_k], \text{ برای } k=1,2.$$

آنگاه

$$(a) \Phi[f, D_1] = \Phi[f, D_2], 0 < t < T \quad \text{implies} \quad D_1(u) = D_2(u) \quad \text{for } u \in J.$$

$$(b) \Psi[f, D_1] = \Psi[f, D_2], 0 < t < T \quad \text{implies} \quad D_1(u) = D_2(u) \quad \text{for } u \in J.$$

اثبات: ابتدا فرض کنید که  $D_1(f(0)) = D_2(f(0))$ . حال چون  $D_1$  و  $D_2$  (۲,۳) را برآورده می سازند، تفاوت آها

(۲,۳) را در صورتی برآورده می سازد که این توابع در  $J$  یکسان نباشند، آنگاه یک زمان مثبت  $t_1$  وجود دارد که

که در آن  $0 < t_1 \leq T$ ،  $D_1(f(t)) - D_2(f(t))$  یکی از علامات روی  $[0, t_1]$  است. بنابراین لم ۲,۱ نشان می دهد که  $D_1(u_2(x, t)) - D_2(u_2(x, t))$  یکی از علامات روی  $(0, 1) \times (0, t_1)$  است. با استفاده از شناسایی (۲,۷) داریم

$$\int_0^{t_1} \int_0^1 (D_1(u_2(x, t)) - D_2(u_2(x, t))) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = \int_0^{t_1} (g_1(t) - g_2(t)) \theta(t) \, dt,$$

که در آن  $\phi$  (۲,۶) را با  $\tau = t_1$  حل می کند. بنابراین این فرضیه ها نشان می دهد که سمت راست این معادله محو می شود یعنی

$$\int_0^{t_1} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = 0,$$

و این به طور مستقل برای داده های  $\theta(t)$  انتخاب شده به عنوان ورودی برای مسئله الحاقی برقرار است. به طور مشخص انتخاب  $\theta(t)$  به طوری که  $\partial_x \phi < 0$  روی  $(0, 1) \times (0, t_1)$  و در دیدی به لم (b) ممکن است و مورد  $\partial_x u_2 < 0$  روی  $(0, 1) \times (0, t_1)$  را داریم. بنابراین انتگرال محوشونده بالا دارای یک عامل انتگرال است که یکی از علامات روی حوزه انتگرالگیری است و بدون هیچ زیرمجموعه اندازه گیری مثبتی روی این دامنه محو می شود. این تناقض با این فرض مخالفت دارد که  $D_1$  و  $D_2$  یکسان نیستند.

اگر فرض کنیم  $D_1(f(0)) \neq D_2(f(0))$ ، آنگاه داریم که یک زمان  $t_1, 0 < t_1 < T$  وجود دارد که در آن تفاوت  $D_1(f(t)) - D_2(f(t))$  صفر است یا  $t_1 = T$  و این تفاوت یک علامت در  $[0, T]$  است. در این مورد، شاهد اینست که  $D_1(f(t)) - D_2(f(t))$  یک علامت روی  $[0, t_1]$  است، که  $0 < t_1 \leq T$  و این استدلال می تواند مانند قبل کامل شود. یک استدلال مشابه، با استفاده از (۲,۹)، نتیجه (b) را ایجاد می کند.

به طور رسمی می توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} (\Phi[f, D_1] - \Phi[f, D_2], \theta)_{L^2} &\stackrel{\text{def}}{=} (\delta\Phi[D_1, D_2] \Delta D, \theta)_{L^2} \\ &= \langle \Delta D, {}^t \delta\Phi[D_1, D_2] \theta \rangle_{W(J) \times W(J)^*}. \end{aligned}$$

در نگاهی به (۲,۷)،

$$\begin{aligned} (\Phi[f, D_1] - \Phi[f, D_2], \theta)_{L^2} &= \int_0^T (g_1(t) - g_2(t))\theta(t) dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2))\partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt, \\ &= \langle \Delta D, {}^t \delta \Phi[D_1, D_2] \theta \rangle_{W(J) \times W(J)^*}. \end{aligned}$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} (\Psi[f, D_1] - \Psi[f, D_2], \beta)_{L^2} &\stackrel{\text{def}}{=} (\delta \Psi[D_1, D_2] \Delta D, \beta)_{L^2} \\ &= \langle \Delta D, {}^t \delta \Psi[D_1, D_2] \beta \rangle_{W(J) \times W(J)^*}, \end{aligned}$$

و با ارجاع به (۲,۹)

$$\begin{aligned} (\Psi[f, D_1] - \Psi[f, D_2], \beta)_{L^2} &= \int_0^T (h_1(t) - h_2(t))\beta(t) dt \\ &= \int_0^T \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2))\partial_x u_2 \partial_x \psi dx dt \\ &= \langle \Delta D, {}^t \delta \Psi[D_1, D_2] \beta \rangle_{W(J) \times W(J)^*}. \end{aligned}$$

(۲,۷)، (۲,۹) تحقیقاتی را برای  ${}^t \delta \Phi[D_1, D_2]$  and  ${}^t \delta \Psi[D_1, D_2]$ ، مشتقات Gateaux با توجه به  $D$

برای نگاشت  $\Phi$  and  $\Psi$  فراهم می کند. در بخش بعدی نشان داده خواهد شد که

${}^t \delta \Phi[D_1, D_2]$  and  ${}^t \delta \Psi[D_1, D_2]$ ، به طور تقریبی معکوس پذیر هستند. به طور دقیق تر، ما یک

محدودیت را برای ضریب روی نگاشت داده ها اعمال می کنیم که نگاشتی را از  $R$  به  $R$  القا می کند. این محدود

شایسته یکنواختی محدود و پیوستگی از ضریب به نگاشت داده ها است، از اینرو این محدودیت یک همومورفیسم را

از دامنه خود روی گستره خود تعریف می کند. معکوس نمودن این نگاشت منجر به عکس تقریبی برای ضریب در

نگاشت داده ها می شود.

۳. راه حل تقریبی برای مسئله معکوس

ما مسئله معکوس را در نظر می گیریم که در آن ضریب  $D=D(u)$  باید از داده هایی شناسایی شود که در گره های ثابت  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  در بازه  $[0, T]$  فرض می شوند:

$$\text{data}(f, g) \begin{cases} f(t_k) = \mu_k \\ g(t_k) = -D(\mu_k) \partial_x u_1(0, t_k) = \gamma_k \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

ما همچنین به شناسایی  $D=D(u_1)$  مبتنی بر داده های جایگزین علاقه مند هستیم.

$$\text{data}(f, h) \begin{cases} f(t_k) = \mu_k \\ h(t_k) = u_1(1, t_k) = \eta_k \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

به طور دقیق تر، ما استفاده از یک یا دیگر مجموعه داده ها را برای ساختن یک چندضلعی ادامه می دهیم تخمین (یعنی خط تکه ای و پیوسته) برای ضریب مجهول  $D(u)$  مجموعه داده ها،

در گره های ثابت، معین فرض می شود که یک پارتیشن را تعریف می کند  $f_k = f(t_k), k = 0, 1, \dots, N_*$

برای بازه  $I = [0, T]$  این پارتیشن برای  $I$  مش داخلی نامیده می شود. بنابراین ما یک پارتیشن مرتبط را برای  $J = [f(0), f(T)]$  دامنه ضریب  $D$  تعریف می کنیم. این پارتیشن،

مش داخلی نامیده می شود و توسط  $f(0) = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_M = f(T)$  معین می شود،

یعنی  $u_0=f_0$  و  $u_M=f_M$  و برای هر  $j, z = 1, \dots, M < N$  داریم  $u_j=f_j$  برای  $k \geq j$ .

برای مش داخلی coarser بودن لازم است، اما برای مش داخلی نه، زیرا روی هر بازه فرعی مش خارجی، ما نیاز به

محاسبه مقادیر داخلی جواب  $u(x, t)$ ، برای مسئله مستقیم داریم تا ارزیابی انتگرال ها صورت گیرد که در شناسه

های استفاده شده در شناسایی ظاهر می شوند. بین دو مش داخلی گره های  $u_j=f(t_k)$  و  $u_{j+1}$ ، چندین گره مش

داخلی باید رخ دهد و این حقیقت از دلخواه بودن مش خارجی به منظور بهبود دقت شناسایی جلوگیری می کند.

ما در حال حاضر خانواده توابع چندضلعی،  $D$ ، را در نظر می گیریم که مرتبط با پارتیشن لاست. هر عضو خانواده

توسط مقادیر خود در گره های  $u_k$  مشخص می شود یعنی برای  $d_k = \hat{D}(\mu_k)$ . به طور دقیق تر، ما تعریف می

کنیم



$$\hat{D}(u) = \sum_{k=1}^M [d_{k-1}\rho_{k-1}(u) + d_k\lambda_k(u)] \quad (3.1)$$

که در آن

$$\rho_k(u) = \begin{cases} \frac{\mu_{k+1} - u}{\mu_{k+1} - \mu_k} & \text{if } \mu_k \leq u \leq \mu_{k+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq M-1,$$

$$\lambda_k(u) = \begin{cases} \frac{u - \mu_{k-1}}{\mu_k - \mu_{k-1}} & \text{if } \mu_{k-1} \leq u \leq \mu_k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq M.$$

به طور معادل، ما برای  $1 \leq k \leq M$  می نویسیم

$$\hat{D}(u) = d_{k-1}\rho_{k-1}(u) + d_k\lambda_k(u) \quad \text{for } \mu_{k-1} \leq u \leq \mu_k. \quad (3.2)$$

ما موارد زیر را تعریف می کنیم:

• نشاندهنده ضریب چندضلعی ارائه شده توسط (۳,۱) مبتنی بر  $\hat{D}(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_M]$

مقادیر گره ای  $[d_0, d_1, \dots, d_M]$

• نشاندهنده جواب مسئله مستقیم (۲,۱) با ضریب  $D$  و داده های  $f$  است  $u(x, t; D, f)$

• نشاندهنده جواب مسئله الحاقی (۲,۶) با ضریب  $D(u(x,t)) \stackrel{\text{def}}{=} D(x, t)$  است  $\phi(x, t, D, \theta)$

• نشاندهنده جواب مسئله الحاقی (۲,۸) با ضریب  $D(u(x,t)) \stackrel{\text{def}}{=} D(x, t)$  و داده های  $\beta(t)$  است.  $\psi(x, t, D, \beta)$

های  $\beta(t)$  است.

برای یک  $f(t)$  معین که (۲,۲) را برآورده می سازد، یک ضریب مجهول  $D = D(u)$  که (۲,۳) را برآورده می سازد و

داده های شار اندازه گیری شده  $g(t) = \Phi[f, D]$  فرض می کنیم که یک پارتیشن خارجی ثابت وجود

دارد،  $\Pi = \{0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_M = f(T)\}$  برای  $\lambda$  بنابراین ما یک تخمین ضریب

چندجمله ای را برای  $D$  توسط

الگوریتم بازگشتی زیر مبتنی بر  $(f,g)$ -data  $\{f(t)-g(t)\}$

•  $D_0$  معین فرض می شود

• برای  $k = 1, 2, \dots, dk$  از  $d_0, d_1, \dots, dk-1$  تعیین می شود

$$(d_k - d_{k-1}) \int_{T_{k-1}}^{T_k} \lambda_k(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = - \int_{T_{k-1}}^{T_k} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) \, dt, \quad (3.3)$$

• که در آن

$$D_1(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_k],$$

$$D_2(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_{k-1}],$$

$$u_2(x, t) = u(x, t; D_2, f),$$

$$g_2(t) = -D_2(f(t)) \partial_x u_2(0, t) \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T_k,$$

$$\phi(x, t) = \phi(x, t; D_1, f(T-t)) \quad \text{for } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T_k.$$

تخمین  $D(u)$  مبتنی بر  $(f,h)$ -data  $\{f(t), h(t)\}$  مشابه است. بنابراین می توانیم نشان دهیم که

لم ۳,۱ برای  $f(t)$  که (۲,۲) را برآورده می سازد، برای ضریب  $D$  که (۲,۳) را برآورده می سازد و برای یک پارتیشن

ثابت،  $\Pi = 0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots < \mu_M = f(T)$  برای  $\lambda$  مقادیر گره ای  $[d_0, d_1, \dots, d_m]$  باید

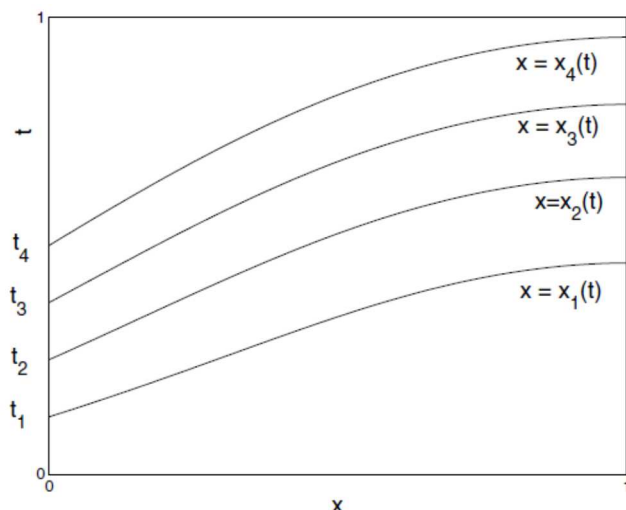
توسط الگوریتم (۳,۳) تعیین شود. بنابراین برای  $k = 1, 2, \dots, M$

$$|D(\mu_k) - d_k| \leq C |\mu_k - \mu_{k-1}|. \quad (3.4)$$

اثبات. ما این فرض را ادامه می دهیم که مقدار اولیه گره،  $D(u_0) = D(f(0)) = d_0$ ، شناخته شده است و مقادیر

باقیمانده  $d_1, \dots, d_M$  توسط الگوریتم (۳,۳) تعیین می شود. ابتدا مقدار  $d_1$  را در نظر بگیرید. اگر ما (۲,۷) را با

$\tau = T_1$  اعمال کنیم و



شکل ۱. منحنی های ایزو

• در  $D_2(u) = P_M[d_0, d_0]$ , و  $J_1 = [\mu_0, \mu_1]$ ,  $D_1(u) = P_M[d_0, d_1]$ ,

• در  $Q_1 = (0, 1) \times (0, T_1) u_1(x, t) = u(x, t; D_1, f)$ ,

$u_2(x, t) = u(x, t; D_2, f)$ ,

بنابراین داریم

$$\int_0^{T_1} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) \, dt.$$

در اینجا،  $g(t)$ ، داده های اندازه گیری شده شار و  $g_2(t)$  خروجی تولید شده توسط حل (۲،۱) با ضریب  $D(u) =$

$D_2(u)$  است یعنی  $g_2 = \Phi[f, D_2]$ . توابع  $\theta(t)$  و  $\phi(x, t)$  نشاندهنده داده ها و جواب به ترتیب برای

مسئله الحاقی  $g$  است. چون تابع  $f(t)$  در مسئله مستقیم (۲،۲) را برآورده سازد، از لم 2.1(a) داریم که  $u_2$  مورد زیر

را برآورده می سازد

$$f(0) = \mu_0 \leq u_2(x, t) \leq \mu_1 = f(T_1) \quad \text{for } (x, t) \in (0, 1) \times (0, T_1).$$

بنابراین مطابق با (۳،۲) برای  $u \in J_1 = \mu_0 \leq u \leq \mu_1$ ,

$$D_1(u) = d_0 \rho_0(u) + d_1 \lambda_1(u), \quad D_2(u) = d_0 \rho_0(u) + d_0 \lambda_1(u) = d_0,$$

و بنابراین

$$D_1(u_2) - D_2(u_2) = (d_1 - d_0)\lambda_1(u_2).$$

توجه کنید که برای هر مقدار گره ای،  $\mu_k, 0 \leq k \leq M$ ، داریم،  $u_2(x_k(t), t) = \mu_k$  همراه با برخی منحنی های  $x = x_k(t)$  با  $x_k(0) = \mu_k$  و  $x_k(\tau_k) = 1$  برای برخی  $\tau_k > \tau_{k-1} > \dots > \tau_1 > 0$ . نمونه های چنین منحنی هایی در شکل ۱ نشان داده شده است.

بنابراین، ما داریم  $u_2(x(t), t) = \mu_0$  همراه با منحنی  $x = x_0(t)$  با  $x_0(0) = 0$  و  $x_0(\tau_1) = 1$  برای  $\tau_1 > 0$ . فرض می کنیم که  $T_1$  به طور کافی کوچک است تا  $0 < x_0(T_1) < 1$ . بنابراین

$$\lambda_1(u_2(x, t)) = \begin{cases} \frac{\mu_0 - u_2(x, t)}{\mu_0 - \mu_1} & \text{if } 0 \leq x \leq x_0(t), 0 \leq t \leq T_1 \\ 0 & \text{if } x > x_0(t), 0 \leq t \leq T_1 \end{cases}$$

و شناسه انتگرال به عبارت زیر کاهش می یابد

$$(d_1 - d_0) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) \, dt,$$

یعنی

$$d_1 = d_0 + \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) \, dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt}.$$

این معادله اولی مقدار گره ای مجهول  $d_1$  را تعریف می کند. حال ما رابطه ای بین  $d_1$  و  $D(u_1)$  ایجاد می کنیم.

پس از (۲,۷) داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt &= \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) \, dt \\ &= (d_1 - d_0) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

در نظر بگیرید  $\hat{D}_M(u)$  نشاندهنده ضریب چندضلعی روی پارتیشن  $\Pi$  باید که  $\hat{D}_M(\mu_k) = D(\mu_k)$  را برای تمام  $k$  برآورده می سازد. توجه کنید که این ضریب به طور کلی داده های اندازه گیری شده معین،  $g(t)$  را تولید می کند و در نتیجه ضریب چندضلعی با مقادیر گره ای  $\{dk\}$  تولید شده توسط این الگوریتم نیست. هرچند، این ضرایب به صورت زیر به هم مرتبط می شوند:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - \hat{D}_M(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \\ &+ \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (\hat{D}_M(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - \hat{D}_M(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \\ &+ (D(\mu_1) - d_0) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt, \end{aligned}$$

و با ترکیب این دو عبارت داریم

$$\begin{aligned} & (d_1 - D(\mu_1)) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \\ &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} (D(u_2) - \hat{D}_M(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \\ &\leq \max_{J_1} |D - \hat{D}_M| \left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt \right|. \end{aligned}$$

حال

$$\max_{J_1} |D - \hat{D}_M| = |D(\mu_*) - \hat{D}_M(\mu_*)| \quad \text{for some } \mu_* \in J_1.$$

اما

$$\begin{aligned} |D(\mu_*) - \hat{D}_M(\mu_*)| &\leq |D(\mu_*) - D(\mu_0)| + |D(\mu_0) - \hat{D}_M(\mu_*)| \\ &\leq K |\mu_* - \mu_0| + |\hat{D}_M(\mu_0) - \hat{D}_M(\mu_*)|. \end{aligned}$$

بعلاوه

$$|\hat{D}_M(\mu_0) - \hat{D}_M(\mu_*)| \leq K |\mu_* - \mu_0|,$$

و

$$|D(\mu_*) - \hat{D}_M(\mu_*)| \leq 2K |\mu_* - \mu_0|.$$

بنابراین

$$|d_1 - D(\mu_1)| \leq 2K \frac{|\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt|}{|\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt|} |\mu_* - \mu_0|.$$

از اینرو برای  $\lambda_1^*, 0 < \lambda_1^* < 1$  مشخص است که

$$\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = \lambda_1^* \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt$$

می یابیم

$$1 \leq \frac{|\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt|}{|\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt|} \leq \frac{1}{\lambda_1^*} < \infty.$$

بنابراین

$$|d_1 - D(\mu_1)| \leq \frac{2K}{\lambda_1^*} |\mu_* - \mu_0| \leq C_1 |\mu_1 - \mu_0|.$$

این نتیجه (۳،۴) برای  $k=1$  است.

در تعیین مقادیر متناوب  $d_k$ ، فرض می کنیم که  $d_0, d_1, \dots, d_{k-1}$  شناخته شده است و داریم

- on  $[\mu_0, \mu_k]$ ,  $D_1(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_k]$  and  $D_2(u) = P_M[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}, d_{k-1}]$ ,
- on  $Q_k = (0, 1) \times (0, T_k)$ ,  $u_1(x, t) = u(x, t; D_1, f)$  and  $u_2(x, t) = u(x, t; D_2, f)$ .

بنابراین  $D_1(u)$  و  $D_2(u)$  روی  $[\mu_0, \mu_{k-1}]$  یکسان هستند و تنها در  $J_k = [\mu_{k-1}, \mu_k]$  تفاوت دارند

که در آن داریم

$$D_1(u) = d_{k-1}\rho_{k-1}(u) + d_k\lambda_k(u) \quad \text{for } \mu_{k-1} \leq u \leq \mu_k,$$

$$D_2(u) = d_{k-1}\rho_{k-1}(u) + d_{k-1}\lambda_k(u) = d_{k-1} \quad \text{for } \mu_{k-1} \leq u \leq \mu_k.$$

بنابراین

$$\int_0^{T_k} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 (D_1(u_2) - D_2(u_2)) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt$$

$$= (d_k - d_{k-1}) \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^{x_{k-1}(t)} \lambda_k(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt.$$

و داریم

$$(d_k - d_{k-1}) \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^{x_{k-1}(t)} \lambda_k(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt = \int_{T_{k-1}}^{T_k} (g(t) - g_2(t)) \theta(t) \, dt,$$

همانطور که توسط (۳,۳) تعیین شده است، حال ما به عنوان اولین قسمت این اثبات را نشان می دهیم که

$$|d_k - D(\mu_k)| \leq C |\mu_k - \mu_{k-1}|.$$

اثبات نتیجه مشابه مبتنی بر داده های  $\{f(t_k), h(t_k)\}$  به طور مشابه صورت می گیرد.

برای  $d_0$  ثابت و  $d_1 > 0$ ، در نظر بگیرید  $P_1(d_1)(u) = d_0\rho_0(u) + d_1\lambda_1(u)$  برای  $u \in J_1$ . بنابراین،

$P_1$  یک نگاشت از  $[0, \infty]$  به فضای فرعی تک بعدی  $W(J_1)$  است. از (۳,۳) داریم، در مورد  $k=1$  که

$$\langle \Delta D(u_2), {}^t \delta \Phi [P_1(d_1), P_1(d_0)](\theta) \rangle = \langle (d_1 - d_0)\lambda_1(u_2), {}^t \delta \Phi [P_1(d_1), P_1(d_0)](\theta) \rangle$$

$$= (d_1 - d_0) \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi \, dx \, dt.$$

این بدین معنی است که انتگرال دوپل در عبارت بالا نمایشی برای مشتق با توجه به پارامتر  $d$ ، برای نگاشت ضریب

به داده ها،  $\Phi$ ، است که به فضای فرعی یک بعدی  $W(J_1)$  محدود می شود. چون انتگرال دوپل می تواند غیرصفر

باشد، داریم که نگاشت ورودی/خروجی محدود به طور موضعی تقریباً معکوس پذیر است. لم ۳,۱ اطمینان می بخشد

که در صورتی که داده ها به ما داده شده باشد  $\{f(t_k), g(t_k)\}$  یا  $\{f(t_k), h(t_k)\}$ ، آنگاه ما می توانیم

مقادیر گره ای  $\{dk\}$  را محاسبه کنیم که داده های اندازه گیری شده را در حضور (۳,۳) دوباره تولید می کند و اینکه

این مقادیر گره ای به مقادیر گره ای ضریب صحیح  $D(u_1)$  میل می کنند زمانی که اندازه مش برای مش خارجی کاهش می یابد. هر چند این نتیجه مشکلات معینی را نادیده می گیرد:

- امکان دانستن ضریب  $D_1(u(x,t))$  در مسائل الحاقی وجود ندارد زیرا  $D_1$  ضریبی است که ما میخواهیم شناسایی کنیم و  $u$  یک نقطه نامعین بین  $u_1$  و  $u_2$  است. این بدین معنی است که فقط مل توانیم جواب را برای مسئله الحاقی تخمین بزنیم و این مورد دارای تاثیر روی نتایج لم ۳,۱ است.

- انتگرال ها در این هویت فقط می توانند توسط انتگرالگیری عددی تخمین زده شوند که برای آن، تنها یک درجه محدود از پالایش ممکن است. این می تواند با توافق بین  $dk$  و  $D(uk)$  استنباط شود. ما هر دوی این آثار را با شروع با اثر جواب تخمین الحاقی در نظر می گیریم.

ابتدا توجه کنید که الگوریتم  $(۳,۳)$  اطمینان می بخشد که در تعیین مقدار گره ای  $uk$ ، حل مسئله الحاقی تنها در نوار  $S_k = \{(0, 1) \times (T_{k-1}, T_k)\}$  لازم است. در نظر بگیرید که  $\hat{\phi}(x, t)$  نشاندهنده ضریب

روی این نوار باشد. به طور مثال، فرض کنید که ضریب در مسئله الحاقی  $g$ - با مقدار ثابت معلوم  $D_1(\mu(x, t))$

$dk-1$  انتخاب می شود یعنی

$$D_1(\mu(x, t)) = d_{k-1}, \quad \mu(x, t) \in J_k = [\mu_{k-1}, \mu_k].$$

بنابراین اگر ما  $\phi$  را در  $(۳,۳)$  با  $\hat{\phi}(x, t)$  جایگزین کنیم، میتوانیم مقدار گره ای محاسبه شده حاصل را توسط

$dk$  نشان دهیم. توجه کنید که با این انتخاب برای ضریب، اکنون هیچ مشکلی در حل مسئله الحاقی  $(۲,۶)$  برای  $\hat{\phi}$

در نوار وجود ندارد،  $(0, 1) \times [T_{k-1}, T_k]$ ، و برای محاسبه  $dk$  با استفاده از  $(۳,۳)$  است. هنوز می توان دید

که چطور مقادیر  $\hat{d}_k$  با مقادیر  $dk$  مقایسه می شوند. ما با یک لم شروع می کنیم.



لم ۳,۲ در نظر بگیرید که  $f(t)$ ، (۲,۲) را برآورده سازد، در نظر بگیرید که  $D$  (۲,۳) را برآورده سازد و در نظر بگیرید که  $\Pi$  نشاندهنده یک پارتیشن ثابت باشد،  $\Pi = \{\mu_k = f(T_k) : k = 0, 1, \dots, M\}$  برای  $l$  برای  $k$  بین ۱ و  $M$  مسئله الحاقی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(x, t) + c \partial_{xx} \phi(x, t) &= 0 & \in S_k, \\ \phi(x, T_k) &= 0 & x \in (0, 1), \\ \phi(0, t) &= f(T_k - t) & t \in (T_{k-1}, T_k), \\ \partial_x \phi(1, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k). \end{aligned}$$

فرض کنید که  $\{\phi_i, c_i\}, i = 1, 2$  نشاندهنده دو جواب برای مسئله الحاقی متناظر با انتخاب های متمایز ضریب  $c$  باشد. به خصوص فرض کنید که  $\phi_1 = \phi(x, t, c_1, \theta)$  برای ثابت  $c_1 = d_{k-1}$ ، در حالیکه  $\phi_2 = \phi(x, t, c_2, \theta)$  متناظر با انتخاب  $c_2(x, t) = D(\mu(x, t))$  است که در آن  $u(x, t)$  نشاندهنده یک تابع است که روی نوار  $S_k = (0, 1) \times (T_{k-1}, T_k)$  با مقادیر  $J_k = [\mu_{k-1}, \mu_k]$  پیوسته است. بنابراین

$$\|\partial_x(\phi_1 - \phi_2)\|_{L^2(S_k)} \leq C|\mu_k - \mu_{k-1}|.$$

اثبات. با این مورد شروع می کنیم که  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  عبارت زیر را برآورده می سازد

$$\begin{aligned} \partial_t(\Delta\phi) + c_1 \partial_{xx}(\Delta\phi) &= (c_2 - c_1) \partial_{xx} \phi_2 & (x, t) \in S_k, \\ \Delta\phi(x, T_k) &= 0 & x \in (0, 1), \\ \Delta\phi(0, t) &= 0 & \in (T_{k-1}, T_k), \\ \partial_x(\Delta\phi)(1, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k), \end{aligned}$$

و اگر  $\Psi$  نشاندهنده یک تابع آزمون دلخواه باشد، آنگاه

$$\int \int_{S_k} \{\partial_t(\Delta\phi) + c_1 \partial_{xx}(\Delta\phi)\} \partial_x \psi \, dx \, dt = \int \int_{S_k} \{-\Delta c \partial_{xx} \phi_2\} \partial_x \psi \, dx \, dt.$$

انتگرال روی اجزا نشان می دهد که

$$\int \int_{S_k} \partial_t(\Delta\phi) \partial_x \psi \, dx \, dt = \int \int_{S_k} \partial_x(\Delta\phi) \partial_t \psi \, dx \, dt + \int_0^1 \Delta\phi \partial_x \psi \Big|_{t=0}^{t=T} \, dx - \int_{T_{k-1}}^{T_k} \Delta\phi \partial_x \psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt,$$

9

$$\int \int_{S_k} \partial_{xx}(\Delta\phi) \partial_x \psi \, dx \, dt = - \int \int_{S_k} \partial_x(\Delta\phi) \partial_{xx} \psi \, dx \, dt + \int_{T_{k-1}}^{T_k} \partial_x(\Delta\phi) \partial_x \psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt,$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \int \int_{S_k} \partial_x(\Delta\phi) [\partial_t \psi - c_1 \partial_{xx} \psi] \, dx \, dt + \int_0^1 \Delta\phi \partial_x \psi \Big|_{t=T_{k-1}}^{t=T_k} \, dx \\ & \quad - \int_{T_{k-1}}^{T_k} \Delta\phi \partial_x \psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt + c_1 \int_{T_{k-1}}^{T_k} \partial_x(\Delta\phi) \partial_x \psi \Big|_{x=0}^{x=1} \, dt \\ & = \int \int_{S_k} \{-\Delta c \partial_{xx} \phi_2\} \partial_x \psi \, dx \, dt. \end{aligned}$$

حال تابع آزمون  $\Psi$ ، برای برآورده سازی

$$\begin{aligned} \partial_t \psi - c_1 \partial_{xx} \psi &= \partial_x(\Delta\phi) & (x, t) \in S_k, \\ \psi(x, T_{k-1}) &= 0 & x \in (0, 1), \\ \partial_x \psi(0, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k), \\ \psi(1, t) &= 0 & t \in (T_{k-1}, T_k). \end{aligned}$$

بنابراین، هویت انتگرال قبلی کاهش می یابد به

$$\int \int_{S_k} [\partial_x(\Delta\phi)]^2 \, dx \, dt = \int \int_{S_k} (c_2 - c_1) \partial_{xx} \phi_2 \partial_x \psi \, dx \, dt.$$

حال،  $\Psi$  جوابی برای مسئله خطی با ضرایب ثابت است، بنابراین می تواند بر حسب تابع Green،  $\Gamma(x, t)$ ، بیان شود.

$$\psi(x, t) = \int_{T_{k-1}}^t \int_0^1 \Gamma(x - y, t - \tau) \partial_x(\Delta\phi)(y, \tau) \, dy \, d\tau, \quad (x, t) \in S_k,$$

$$\partial_x \psi(x, t) = \int_{T_{k-1}}^t \int_0^1 \partial_x \Gamma(x - y, t - \tau) \partial_x (\Delta \phi)(y, \tau) dy d\tau.$$

$(x, t) \in S_k$ , بنابراین برای تمام

$$\begin{aligned} |\partial_x \psi(x, t)| &\leq \int_{T_{k-1}}^t \int_0^1 |\partial_x \Gamma(x - y, t - \tau) \partial_x (\Delta \phi)(y, \tau)| dy d\tau \\ &\leq \left( \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 |\partial_x \Gamma(x - y, t - \tau)|^2 dy d\tau \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \int_{T_{k-1}}^{T_k} \int_0^1 |\partial_x (\Delta \phi)(y, \tau)|^2 dy d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\max_{(x,t) \in S_k} |\partial_x \psi(x, t)| \leq C \|\partial_x (\Delta \phi)\|_{L^2(S_k)}.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \iint_{S_k} [\partial_x (\Delta \phi)]^2 dx dt &= \left| \iint_{S_k} (c_2 - c_1) \partial_{xx} \phi_2 \partial_x \psi dx dt \right| \\ &\leq \max_{S_k} |\Delta c(x, t)| \iint_{S_k} |\partial_{xx} \phi_2 \partial_x \psi| dx dt \\ &\leq \max_{S_k} |\Delta c(x, t)| \|\partial_{xx} \phi_2\|_{L^1} \|\partial_x \psi\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\|\partial_x (\Delta \phi)\|_{L^2(S_k)} \leq C \max_{S_k} |\Delta c(x, t)|.$$

همچنین

$$\begin{aligned} \max_{S_k} |\Delta c(x, t)| &= \max_{S_k} |d_{k-1} - D(\mu(x, t))| \\ &\leq |d_{k-1} - D(\mu_{k-1})| + \max_{S_k} |D(\mu_{k-1}) - D(\mu(x, t))| \\ &\leq 2K |\mu_k - \mu_{k-1}|. \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\|\partial_x(\Delta\phi)\|_{L^2(S_k)} \leq C |\mu_k - \mu_{k-1}|.$$

حال ما از این برآورد برای در نظر گرفتن اثر استفاده از جواب الحاقی تخمینی برای مقدار اول گره ای  $d_1$ ، استفاده می کنیم. از (۳,۳) داریم که تفاوت بین مقدار،  $d_1$ ، در مقایسه محاسبه شده با استفاده از مسئله الحاقی مجهول اما درست و مقدار آن،  $\hat{d}_1$ ، با استفاده از مسئله الحاقی قابل محاسبه اما نادرست به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \hat{d}_1 - d_1 &= \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t))\theta(t) dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} dx dt} - \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t))\theta(t) dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt} \\ &= \frac{(g - g_2, \theta)}{II(\hat{\phi})} - \frac{(g - g_2, \theta)}{II(\phi)} \\ &= (g - g_2, \theta) \left\{ \frac{1}{II(\hat{\phi})} - \frac{1}{II(\phi)} \right\} \\ \hat{d}_1 - d_1 &= (d_1 - d_0) \left\{ \frac{II(\phi) - II(\hat{\phi})}{II(\hat{\phi})} \right\}. \end{aligned}$$

در اینجا

$$II(\hat{\phi}) = \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} dx dt.$$

ما می خواهیم نشان دهیم که زمانی که مش خارجی تصفیه می شود، پراکندگی  $II(\phi) - II(\hat{\phi})$  که ناشی از حل مسئله الحاقی با ضریب نادرست است، به صفر کاهش می یابد. از طرف دیگر،  $II(\hat{\phi})$  نیز به سمت صفر کاهش می یابد زمانی که مش تصفیه می شود. برای دیدن اینکه آیا  $II(\hat{\phi})$  با سرعت کمتر از  $II(\phi) - II(\hat{\phi})$  کاهش می یابد یا سرعت بیشتر، آزمایش رفتار  $II(\hat{\phi})$  لازم است. فرض می کنیم که

چون  $x_0(T_1) < 1$  اگر این مورد درست نباشد، می توانیم همیشه پارتیشن خارجی را برای انقباض عرض نوار S1 به منظور تصحیح آن پالایش نماییم. بنابراین حوزه انتگرالگیری برای  $II(\hat{\phi})$  تقریباً ناحیه ای مثلثی است  $\{0 \leq x \leq x_0(t), 0 \leq t \leq T_1\}$ . یک تحلیل دقیق برای نرخ مجانبی همگرایی  $II(\hat{\phi})$  زمانی که  $T_1$  به سمت صفر میل می کند، مشکل است، اما اگر فرض کنیم که  $f(t) = At$  برای یک ثابت مثبت  $A$ ، آنگاه امکان حل واضح برای  $u_2(x,t)$  و  $\hat{\phi}(x,t)$  وجود دارد. با استفاده از استدلال هایی مانند [1]، در می یابیم که  $g(t) = -D(u_1(0,t))\partial_x u_1(0,t)$  و  $g_2(t) = -d_k \partial_x u_2(0,t)$  به طور مجانبی مانند  $\sqrt{t}$  عمل می کند.

این منجر می شود به

$$\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t))\theta(t) dt = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t))A(T_1 - t) dt \approx CT_1^{5/2}. \quad (3.5)$$

یک تخمین شدید مشابه برای  $\partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi}$  روی  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T_1$  به صورت زیر است:

$$\partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi}(x,t) \approx \sqrt{tm(x)}\sqrt{T_1 - tm(x)},$$

که در آن  $m(x)$  نشاندهنده یک تابع کاهشی با  $m(0) = 1$  و  $m(1) = 0$  است. بعلاوه، برای  $T_1$  کوچک، می توان فرض نمود که برای یک ثابت مثبت  $a$   $x_0(t) \approx at$  و

این منجر می شود به

$$\begin{aligned} II(\hat{\phi}) &= \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} dx dt \\ &\approx \int_0^{T_1} \int_0^{at} \frac{u_2(x,t)}{AT_1} \sqrt{tm(x)}\sqrt{T_1 - tm(x)} dx dt \end{aligned}$$

یعنی

$$II(\hat{\phi}) \approx CT_1^{5/2}. \quad (3.6)$$

چون این تخمین (۳,۶) دقیق نیست، کمیت  $II(\hat{\phi})$  به طور عددی برای دنباله مقادیر برای  $T_1$  کاهشی به سمت صفر محاسبه می شود. نتیجه این تخمین مجانبی از تخمین (۳,۶) حمایت می کند که اطمینان می بخشد که  $II(\hat{\phi})$  مانند توان  $T_1^{-5/2}$  کاهش می یابد زمانی که  $T_1$  به سمت صفر میل می کند.

حال

$$\hat{d}_1 - d_1 = (d_1 - d_0) \left\{ \frac{II(\phi) - II(\hat{\phi})}{II(\hat{\phi})} \right\},$$

و

$$\begin{aligned} |II(\phi) - II(\hat{\phi})| &= \left| \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 [\partial_x \phi - \partial_x \hat{\phi}] dx dt \right| \\ &\leq C(T_1) \|\partial_x(\Delta\phi)\|_{L^2(S_1)} \leq C(T_1) |\mu_1 - \mu_0|. \end{aligned}$$

همچنین

$$|d_1 - d_0| = |D(\mu_1) - D(\mu_0)| \leq K |\mu_1 - \mu_0|,$$

و از اینرو

$$|\hat{d}_1 - d_1| \leq |d_1 - d_0| \left| \frac{II(\phi) - II(\hat{\phi})}{II(\hat{\phi})} \right| \leq \frac{KC(T_1)}{II(\hat{\phi})} |\mu_1 - \mu_0|^2.$$

بنابراین برای  $T_1$  به اندازه کافی کوچک

$$\begin{aligned} |\hat{d}_1 - d_1| &\leq \frac{KC(T_1)}{CT_1^{5/2}} |\mu_1 - \mu_0|^2 \\ &\leq \frac{Kf'(\tau)^2}{C} T_1^{-1/2} \quad \text{for some } \tau > 0. \end{aligned}$$

در کل، داریم

لم ۳,۳. برای  $f(t) = At, A>0$  برای ضریب برآورده کننده (۲,۳) و برای یک پارتیشن  $\Pi = \{\mu_k = AT_k : k = 0, 1, \dots, M\}$  برای  $k$  را بین ۱ و  $M$  تثبیت کنید. در نظر بگیرید که  $\phi = \phi(x, t, c, A(T_k - t))$  و  $\phi(x, t, d_{k-1}, A(T_k - t))$  متناظر با ضرایب،  $d_{k-1}$  و  $c(x, t) = D(\mu(x, t))$ ، به ترتیب. نهایتاً در نظر بگیرید که  $\hat{d}_k$  و  $d_k$  نشاندهنده مقادیر گره ای تعیین شده از (۳,۳) با استفاده از مقادیر  $[d_0, d_1, \dots, d_{k-1}]$  و به ترتیب جواب های الحاقی برای  $\hat{\phi}$  و  $\Phi$  باشد. بنابراین

$$|\hat{d}_k - d_k| \leq \frac{K}{II(\hat{\phi})} |\mu_k - \mu_{k-1}|^2 \leq \frac{Kf'(\tau)^2}{C} |T_k - T_{k-1}|^{-1/2}.$$

این لم نشان می دهد که خطای عرضه شده در شناسایی توسط حل مسئله الحاقی با یک ضریب تخمینی دارای اثری افزایشی است زمان که مش خارجی تصفیه می شود. زمانی که این مض تصفیه می شود، discrepancy  $II(\phi) - II(\hat{\phi})$  مانند مربع اندازه مش به سمت صفر میل می کند. هرچند، زمانی که اندازه مش به سمت صفر میل می کند، در می یابیم که  $II(\hat{\phi})$  است که میتواند به عنوان تخمینی برای مشتق Gateaux برای نگاشت  $\Phi$  محدود به فضای فرعی تک بعدی  $W(Jk)$  دیده شود و سریع تر تمایل به صفر شدن دارد، (مانند توان ۵/۲ اندازه مش). این احتمال وجود دارد که استفاده از تقریب جواب الحاقی بتواند به گونه ای بهبود یابد که  $II(\phi) - II(\hat{\phi})$  با سرعت کافی به سمت صفر میل کند که  $|\hat{d}_k - d_k|$  تمایل به صفر شدن دارد زمانی که اندازه مش به سمت صفر میل می کند. هرچند، نتیجه بعدی نشان می دهد که چنین بهبودی، همگرایی جواب تقریبی را بهتر نمی کند.

در نهایت ما تمای به در نظر گرفتن اثر خطاهای انترالگیری عددی در محاسبه  $\hat{d}_k$  داریم. این کار را با در نظر گرفتن  $k=1$  آغاز می کنیم. داریم

$$\hat{d}_1 = d_0 + \frac{\int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t))\theta(t) dt}{\int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} dx dt} = d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\hat{\phi})},$$

9

$$\hat{d}_1^* = d_0 + \frac{I^*(g - g_2)}{II^*(\hat{\phi})},$$

که در آن  $I^*(g - g_2)$  و  $II^*(\hat{\phi})$  به ترتیب نشاندهنده نتایج ترکیبی با استفاده از مش داخلی برای تقریب عددی انتگرال های تک دو دوپل دقیق متناظر است. بنابراین

$$\begin{aligned} \hat{d}_1^* &= d_0 + \frac{I^*(g - g_2) - I(g - g_2) + I(g - g_2)}{II^*(\hat{\phi}) - II(\hat{\phi}) + II(\hat{\phi})} \\ &= d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\hat{\phi})} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2}, \end{aligned}$$

که در آن

$$\varepsilon_1 = \left| \frac{I - I^*}{I} \right| \quad \text{and} \quad \varepsilon_2 = \left| \frac{II - II^*}{II} \right|.$$

حال

$$\frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

بنابراین

$$\hat{d}_1^* = d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\hat{\phi})} \frac{1 + \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_2} \approx d_0 + \frac{I(g - g_2)}{II(\hat{\phi})} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2),$$

9

$$|\hat{d}_1 - \hat{d}_1^*| \leq \left| \frac{I(g - g_2)}{II(\hat{\phi})} \right| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = |\hat{d}_1 - d_0| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$



خطاهای انتگرالگیری عددی توسط عباراتی به شکل زیر تخمین زده می شوند

$$|I - I^*| \leq C(\Delta t)^2 \quad \text{برای } \Delta t = \text{اندازه مش داخلی}$$

9

$$|II - II^*| \leq C(\Delta x \Delta t) = C(\Delta t)^2.$$

استفاده از طرح های انتگرالگیری مرتبه بالاتر توسط این حقیقت محدود می شود که کاهش اندازه مش برای مش  $I$  یا خارجی به منظور دستیابی به دقت شناسایی، نقاط گره مش  $I$  را در مش  $I$  جذب می کند که تنها نقاط کافی را در مش داخلی برای انجام انتگرالگیری های عددی مرتبه بالاتر باقی می گذارد.

از (۳,۵) و (۳,۶) داریم که

$$I = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) A(T_1 - t) dt \approx T_1^{5/2},$$

$$II = \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \phi dx dt \approx T_1^{5/2}.$$

بنابراین، از اینرو که  $T_1 = k \Delta t$  داریم

$$|\hat{d}_1 - \hat{d}_1^*| \leq \left| \frac{I(g - p_M)}{II(\hat{\phi})} \right| (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$\leq |\hat{d}_1 - d_0| \frac{C_1(\Delta t)^2}{C_2(k \Delta t)^{5/2}} \leq C(\Delta t)^{-1/2}.$$

به طور کلی داریم،

لم ۳,۴ تحت شرایط (۳,۳)، در نظر بگیرید که  $\hat{d}_k^*$  منعکس کننده خطای القا شده در  $\hat{d}_k$  با تخمین عددی انتگرال

های مورد نیاز برای (۳,۳) باشد. بنابراین زمانی که اندازه مش (خارجی و داخلی) به سمت صفر میل کند

$$|\hat{d}_k - \hat{d}_k^*| \leq C(\Delta t)^{-1/2}.$$

این تخمین پیشنهاد می دهد که مش خارجی به منظور بهبود دقت شناسایی مقادیر گره ای  $D(u_1)$  تصفیه می شود، بیشتر و بیشتر نقاط گره برای مش داخلی در مش خارجی جذب می شوند که نتیجه خطاهای انتگرالگیری عددی است،  $|I - I^*|$  و  $||I - I^*||$  که از مرتبه  $\Delta t^2$  هستند. در همین زمان، مشتقات Gateaux تخمینی  $II(\hat{\phi})$  مانند  $\Delta t^{3/2}$  به سمت صفر میل می کند بنابراین اثر تخمین انتگرال ها زمانی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند چند برابر می شود. در برخی نقاط، مقادیر انتگرال های استفاده شده برای محاسبه  $dk$  از همان مرتبه دامنه می شود زمانی که خطاهای انتگرالگیری عددی و محاسبه دیگر شامل اطلاعاتی نمی شوند. کاهش بیشتر اندازه مش، فقط خطا را افزایش می دهد.

نهایتاً، ما لم های 3.1، 3.3 و 3.4 را برای نوشتن عبارت زیر ترکیب می کنیم

$$\begin{aligned} |D(\mu_k) - \hat{d}_k^*| &= |D(\mu_k) - d_k + d_k - \hat{d}_k + \hat{d}_k - \hat{d}_k^*| \\ &\leq |D(\mu_k) - d_k| + |d_k - \hat{d}_k| + |\hat{d}_k - \hat{d}_k^*|, \end{aligned}$$

و

$$|D(\mu_k) - \hat{d}_k^*| \leq C_1 \Delta t + C_2 (\Delta t)^{-1/2}. \quad (3.7)$$

این خطا در شناسایی  $dk$ ، زمانی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند، به سمت صفر میل نمی کند اما توسط  $\Delta t$  بهینه که متفاوت از صفر است مینیمم می شود.

#### ۴. آزمایشات عددی

در آزمایشات عددی، ما در اینجا توصیف می کنیم که ما  $f(t)=At$  را برای برخی از ثوابت مثبت انتخاب می کنیم و

نقاط گره  $uk$  را برای مش خارجی توسط  $\mu_k = AT_k, k = 0, 1, \dots, M$  تعریف می کنیم. اینجا

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

برای هر  $k$ ،  $T_k = t_j$  برای برخی از مقادیر  $j < k$  که در آن

نشاندنده پارتیشن (داخلی) برای  $[0, T]$  است. مقادیر مجهول گره ای برای ضریب  $D(u)$  توسط  $dk = D(uk)$  ارائه

می شود و فرض می کنیم که  $d_0$  معلوم است. چون حالت اولیه برای مسئله مستقیم،  $u(x, 0)$  ثابت است و  $f(t)$

یکنواخت افزایشی است،  $Qt$  دامنه شامل یک دنباله از نوارهای غیرمتداخل،  $Sk$ ، تنها با یک مقدار گره ای فعال در هر نوار است. الگوریتم شناسایی  $D$  از داده های  $(f, g)$  به صورت زیر اقدام می شود.

الگوریتم. برای شروع، ما شناسه انتگرال  $g$ - $(\gamma, \nu)$  را روی  $Q1$  اعمال می کنیم. چون راه حل مسئله مستقیم لم

2.1(a) را برآورده می سازد، ما داریم  $\mu_0 \leq u_1(x, t) \leq \mu_1$  برای  $(x, t) \in Q_1$ . بنابراین تنها مقدار

گره ای معلوم  $d_0$  و مقدار گره ای مجهول  $d_1$  روی این نوار فعال است. ما محاسبه مقادیر گره ای مجهول را ادامه

می دهیم و تکرار آن را برای  $dk$  توسط  $d_k^{(i)}$  نشان می دهیم. ما تنظیم می کنیم  $d_1^{(0)} = d_0$ .

ما شناسه انتگرال  $(\gamma, \nu)$  را روی  $Q1$  با عبارت زیر اعمال می کنیم

$$D_1 = P_1[d_0, d_1^{(1)}] \quad \text{and} \quad D_2 = P_1[d_0, d_1^{(0)}],$$

$$u_2(x, t) = u(x, t; D_2, At) \quad \text{and} \quad g_2(t) = \Phi[f, D_2],$$

$$\hat{\phi}(x, t) = \phi(x, t; D_2, A(T_1 - t)).$$

$$A_{11} = \int_0^{T_1} \int_0^{x_0(t)} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} \, dx \, dt, \quad b_1 = \int_0^{T_1} (g(t) - g_2(t)) A(T_1 - t) \, dt,$$

محاسبه می کنیم و

$$A_{11}(d_1^{(1)} - d_0) = b_1.$$

را حل می کنیم.

توجه کنید که  $A_{11}$  و  $b_1$  از محاسبه می شوند که تمام آنها مبتنی بر ضریب معلوم  $D_2$  هستند.

برای ادامه، ما شناسه انتگرال  $(\gamma, \nu)$  را ابتدا روی  $Q1$  اعمال می کنیم که در آن فقط  $d_0, d_1$  فعال هستند و بنابراین

شناسه انتگرال  $g$ - $(\gamma, \nu)$  را دوباره اعمال کنید، اما روی  $Q2$  که در آن  $d_0, d_1, d_2$  فعال هستند. یعنی

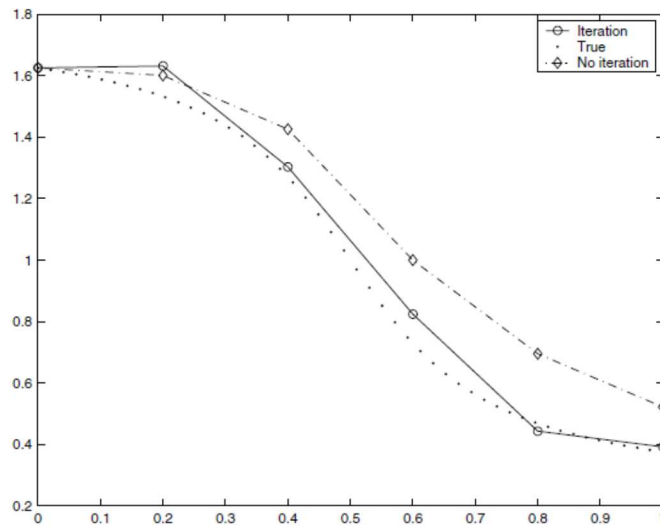
روی  $Q1$

$$D_1 = P_1[d_0, d_1^{(2)}] \quad d_1^{(2)} \text{ is unknown,}$$

$$D_2 = P_1[d_0, d_1^{(1)}] \quad d_1^{(1)} \text{ is known,}$$

و A11 و b1 را مانند قبل محاسبه می کنیم.

توجه کنید که  $u_2, \hat{\phi}, g_2$  مبتنی بر ضریب به روز شده  $D_2$  است به گونه ای که به طور کلی  $d_1^{(2)}$  همانند  $d_1^{(1)}$  نخواهد بود.



شکل ۲. بازیابی  $D(u) = 2-\arctan[6(u-1/2)]$

روی Q2

$$D_1 = P_2[d_0, d_1^{(2)}, d_2^{(1)}]$$

و

$$D_2 = P_2[d_0, d_1^{(1)}, d_2^{(0)}] \quad \text{note : } d_2^{(0)} = d_1^{(1)},$$

محاسبه می کنیم

$$A_{2,1} = \int \int_{Q_{21}} \lambda_1(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} dx dt,$$

$$Q_{21} = \{\mu_0 \leq u_2(x, t) \leq \mu_1, 0 \leq t \leq T_2\},$$

$$A_{2,1} = \int_{T_1}^{T_2} \int_0^{x_1(t)} \lambda_2(u_2) \partial_x u_2 \partial_x \hat{\phi} dx dt,$$

$$b_2 = \int_0^{T_2} (g(t) - g_2(t)) A(T_2 - t) dt,$$

و حل می کنیم

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(2)} - d_1^{(1)} \\ d_2^{(1)} - d_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

ما با این روش اقدام می کنیم که در آن مرحله  $k$ ام که ما  $k$  بار شناسه انتگرال را اعمال می کنیم، یک بار در هر یک از نوارهای  $Q_1$  تا  $Q_k$ . البته این کار  $k$  معادله را کاهش می دهد، یکی برای هر نوار. از هر نوار،  $Q_j$ ، تنها  $j$  مقدار گره فعال مجهول  $d_1^{(p)}, \dots, d_j^{(q)}$  در هر مرحله از تکرار وجود دارد، از اینرو معادله لام تنها شامل  $j$  مجهول اول می شود. این منجر به سیستم مثلی کمتر  $k$  در  $k$  برای تفاوت های  $d_j^{(p)} - d_j^{(p-1)}$  می شود. در مرحله  $k$ ام از این الگوریتم، ما اولین تکرار را برای  $dk$ ، برای تکرار دوم،  $dk-1$  و غیره حل می کنیم. این الگوریتم که ما الگوریتم تکرارشونده می نامیم، از الگوریتم غیرتکراری توصیف شده در بخش قبلی تفاوت دارد. این الگوریتم غیرتکراری برای حذف ویژگی تکراری است به طوری که برای هر  $k$ ، مقدار گره ای  $dk$  توسط حل یک معادله به دست می آید،  $A_{kk}(d_k - d_{k-1}) = b_k$ . حذف تکرار منجر به خطاهای پشت سر هم در مقادیر گره ای محاسبه شده

مرتب  $dk$  می شود همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است. این ضریب در این شکل نشان داده شده است

$$D(u) = 2 - \arctan[6(u - 1/2)] \quad 0 < u < 1, \quad (4.1)$$

ما با دو روش بازیابی می کنیم. در اولی، الگوریتم غیرتکراری برای داده های  $\{f, g\}$  برای تولید نمودار خط تیره اعمال شد، در حالیکه الگوریتم تکراری برای تولید نمودار خط توپر اعمال می شود. داده ها توسط حل مسئله مستقیم (۲،۱) با استفاده از شکل وظیفه ای ضریب (۴،۱) روی مش با ۷۰ گره با حل کننده ode15s Matlab تولید می

شوند. شار  $g(t)$ ، با استفاده از فرمول تفاضل محاسبه شد. این داده های شار به الگوریتم های بازیابی نسبت داده شدند که هر دو از مش ۴۰ گره ای و ode15s برای محاسبه جواب ها در مسئله مستقیم و الحاقی استفاده می نمودند. از شکل مشخص است که خطاها در مقادیر گره ای غیر تکراری برای  $D(u)$  به عنوان مقادیر تعیین شده ترتیبی تجمع می شوند. ما نشان می دهیم که تعیین  $dk$  که ما مجبور به انتگرالگیری روی ناحیه مثلثی تقریبی هستیم  $\{0 < x < x_k(t), T_{k-1} < t < T_k\}$ . هرچند، این الگوریتم باید به طور عددی  $x_0(t_j)$

را روی مش داخلی تقریب بزند و این منجر به تخمین سیستماتیک مقدار  $Akk$  می شود که در عوض منجر به عبارت تصحیح می شود که بسیار کوچک است. این حقیقت که  $D$  یک تابع کاهشی از  $u$  است، به صورت ارائه شده در معادله (۴،۱)، منجر به  $\Delta g(t)$  منفی و تصحیح منفی  $bk/Akk$  می شود. این مطلب در شکل ۲ با نمودار خط تیره گواه شده است. این حقیقت که  $Akk$  بسیر بزرگ است سبب می شود که تصحیح منفی بسیار کوچک باشد به طوری که گراف تابع چندضلعی محاسبه شده بالای گراف ضریب صحیح قرار می گیرد. از اینرو انتگرال ها برای  $Akk$  و  $bk$  تنها شامل بازه  $[T_{k-1}, T_k]$  می شود، هر مقدار شناسایی شده،  $dk$ ، چیزی ندارد تا خطا در مقادیر شناسایی شده قبلی کاهش دهد و از اینرو خطای شناسایی جمع می شود.

این پیشنهاد می دهد که تکرار می تواند مفید باشد. نمودار خط توپر در شکل ۲ نشاندهنده نتیجه شناسایی ضریب (۴،۱) است اما حال، تکرار به صورت زیر است. ما از شناسه (۲،۷) روی  $Q1$  به همراه مقاداری شناخته شده،  $d_0$  برای شناسایی  $d_1^{(1)}$  استفاده می کنیم. در اینجا مقدار شناخته شده،  $d_0$  برای محاسبه  $u_2(x, t), g_2(t)$  and  $\phi(x, t)$  استفاده می شود. سپس ما از شناسه (۲،۷) روی  $Q1$  و  $Q2$  به همراه

مقادیر شناخته شده،  $d_0, d_1^{(1)}$  برای شناسایی  $d_1^{(2)}$  و  $d_2^{(1)}$  استفاده می کنیم. در گام بعدی، ما از شناسه (۲،۷) روی  $Q1, Q2$  و  $Q3$  به همراه مقادیر شناخته شده  $d_0, d_1^{(2)}$  and  $d_2^{(1)}$  برای شناسایی  $d_1^{(3)}, d_2^{(2)}$

و  $d_3^{(1)}$  استفاده می کنیم. در هر مرحله، مقادیر گره ای شناخته شده برای محاسبه

استفاده می شوند. با ادامه این روش، ما نهایتاً  $u_2(x, t), g_2(t)$  and  $\hat{\phi}(x, t)$ .

را به دست می آوریم. از نمودار خط توپر در شکل ۲ معلوم است که به عنوان  $d_M^{(1)}, d_{M-1}^{(2)}, \dots, d_1^{(M)}$

نتیجه تکرار، خطها دیگر نمایش دهنده کاراکتر تجمعی دیده شده در نمودار خط تیره نیستند که در آن تکرار اعمال نمی شود.

در اینجا ضریب

$$D(u) = 1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi u) \quad 0 < u < 1, \quad (4.2)$$

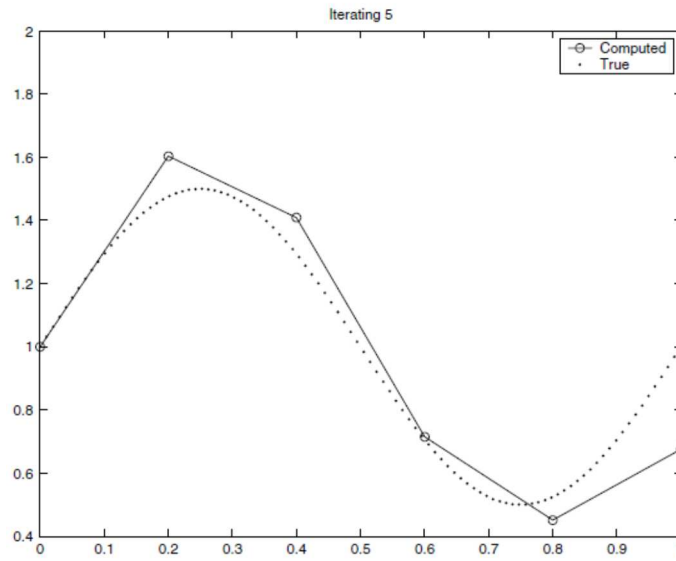
برای تولید داده های شار به صورت مثال قبلی استفاده می شود، هرچند حل کننده ode23s در Matlab استفاده می شود. این داده ها از الگوریتم بازیابی تکراری عبور داده می شود که نتایج آن در شکل ۳ ترسیم شده است.

توافق کیفی بین ضریب صحیح و محاسبه شده در این شکل معقول به نظر می رسد. توجه کنید که این تخمین ابتدائاً بالای نمودار ضریب صحیح (۴,۲) در نواحی قرار می گیرد که در آن D افزایشی است، که با تحلیل آزمایش قبلی موافق است. مقداری که در آن گره آخر در این طرح تکرار نمی شود و به طور بصری کمتر از از مقادیر محاسبه شده در دیگر مقادیر صحیح است.

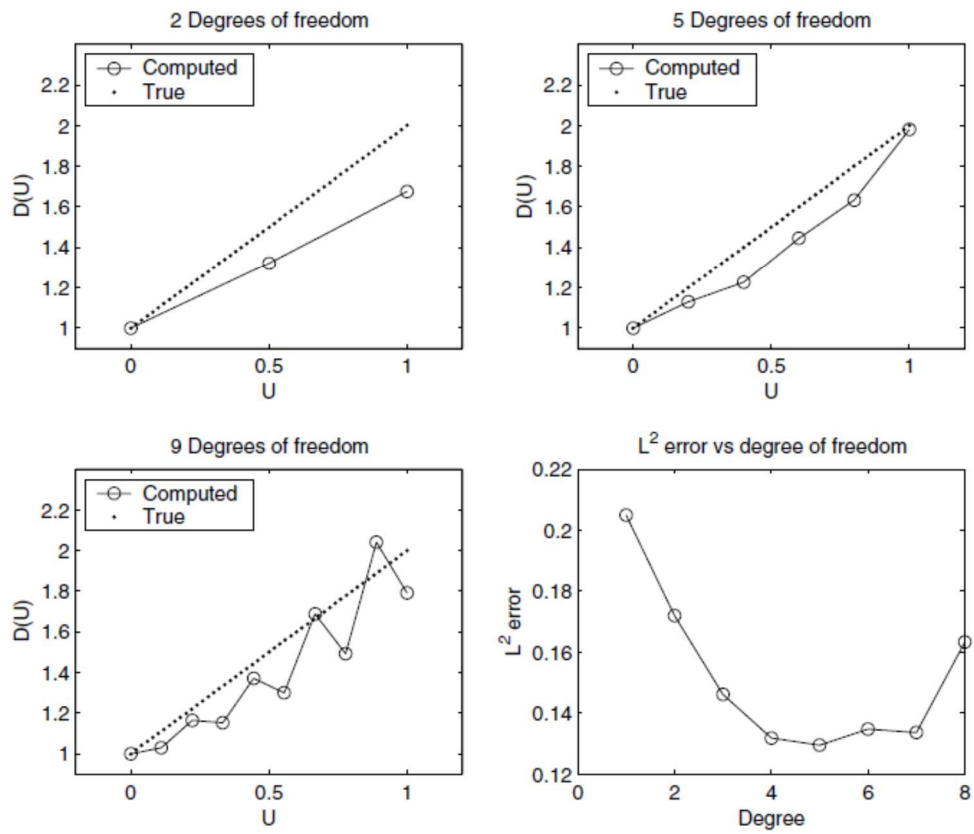
شکل ۴ نمایش دهنده اثر تصفیه مش خارجی با افزایش M، تعداد گره ها به منظور شناسایی ضریب

$$D(u) = 1 + u \quad 0 < u < 1.$$

نتایج برای  $M=2,5$  و ۹ علاوه بر نمودار خطای L2 به ازای M نشان داده شده اند. این مورد آخر نمایش دهنده کاهش خطا با افزایش M تا حدود  $M=5$  است که در آن نقطه، خطا دوباره شروع به افزایش می کند. این نتیجه در توافق کیفی با (۳,۷) قرار دارد.



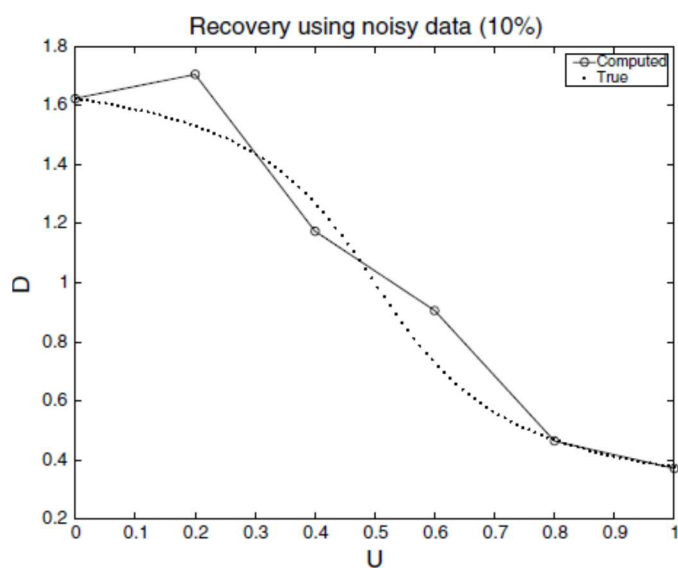
شکل ۳. بازیابی تکراری.  $D(u) = 1 + \frac{1}{2} \sin(2\pi u)$ .



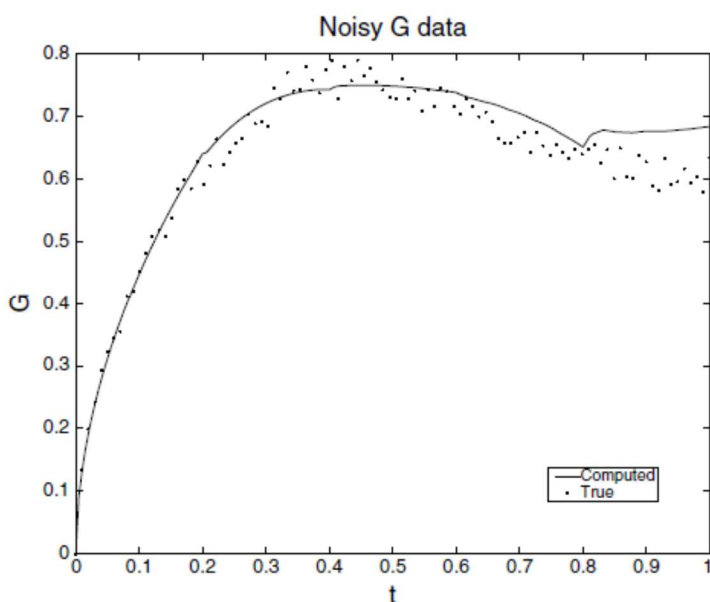
شکل ۴. بازیابی با استفاده از ۲، ۵ و ۹ درجه آزادی



شکل ۵ نشاندهنده بازیابی ضریب است که در آن داده ها شامل خطای القا شده می شوند. یک خطای تصادفی یکنواخت نسبی ۱۰ درصد در داده های شار القا می شود و الگوریتم تکراری اعمال می شود. داده های شار استفاده شده برای بازیابی در شکل ۶ ترسیم شده است. ضریب بازیابی شده



شکل ۵. بازیابی با داده های نویزدار شار



## شکل ۶. داده های شار نويز (G)

ترسيم در شکل ۵، برای ضبط ساختار معمول ضريب صحيح ظاهر می شود. هيچ پيش پردازشی برای این داده ها اعمال نشد که ممکن بود زیرا خطا دارای میانگین صفر بود. انتگرالگیری روی داده های  $g$  در  $(3,3)$  حذف این خطا را میسر می سازد.

## ۵. نتایج

شناسه های انتگرال  $(2,7)$  و  $(2,9)$  معادلاتی هستند که نمایش های مشخصی را برای نگاشت های ورودی به خروجی مرتبط با مسئله معکوس شناسایی ضريب انتشار مجهول از داده های مشخص شده اندازه گیری شده روز مرز فراهم می کند. این معادلات، وسیله ای را برای اثبات این مورد فراهم می کنند که نگاشت های ورودی به خروجی پیوسته، تزریقی و به طور محدود یکنواخت هستند. چنین اطلاعاتی نه از قبل از رویکرد حداقل مربعات خروجی و نه از تکنیک های خطا معادله به دست نمی آید. این معادلات می توانند مبنای برای روش اجرایی تخمین عددی باشند هرچند در اینجا ممکن است رقابت با پیاده سازی های پيش بينی شده OLD مشکل باشد.

## تشکرات

نویسندگان می خواهند از داوران برای دیدگاه های باارزش آنها و پیشنهادات آنها تشکر نمایند. این تحقیق RT توسط National Science Foundation, DUE-0324175 and 0221595 حمایت شده است.

## References

- [1] Ameer H B, Chavent G and Jaffre J 1999 Refinement and coarsening of parameterization for the estimation of hydraulic transmissivity *Proc. 3rd Int. Conf. on Inverse Problems in Engineering (Port Ludlow, WA)*
- [2] Cannon J and DuChateau P 1997 Some asymptotic boundary behavior of solutions of nonlinear parabolic initial boundary value problems *J. Math. Anal. Appl.* **68** 536–47
- [3] Cannon J and DuChateau P 1987 Design of an experiment for the determination of a coefficient in a nonlinear diffusion equation *Int. J. Eng. Sci.* **25** 1067–78
- [4] Chavent G and Lemonnier P 1974 Identification de la non-linearite d'une equation parabolique quasilineaire *Appl. Math. Opt.* **1** 121–62
- [5] DuChateau P 1997 An inverse problem for the hydraulic properties of porous media *SIAM J. Math. Anal.* **28** 611–32
- [6] Hanke M and Scherzer O 1999 Error analysis of an equation error method for the identification of the diffusion coefficient in a quasilinear parabolic differential equation *SIAM J. Appl. Math.* **59** 1012–27
- [7] Hinestroza D and Murio D 1993 Identification of transmissivity coefficients by mollification techniques: Part I. 1-dimensional elliptic and parabolic problems *Comput. Math. Appl.* **25** 59–79
- [8] Jarny Y, Ozisik M N and Bardon J P 1991 A general optimization method using adjoint equation for solving multidimensional inverse heat conduction *Int. J. Heat Mass Transfer* **34** 2911–8
- [9] Knabner P and Bitterlich S 2002 An efficient method for solving an inverse problem for the Richards equation *J. Comput. Appl. Math.* **147** 153–73
- [10] Nabakov R 1996 An inverse problem for porous medium equation *Parameter Identification and Inverse Problems in Hydrology, Geology and Ecology* ed J Gottlieb and P DuChateau (Dordrecht: Kluwer) pp 155–63
- [11] Reeve D E and Spivack M 1999 Recovery of a variable coefficient in a coastal evolution equation *J. Comput. Phys.* **151** 585–96
- [12] Richter G R 1981 Numerical identification of a spatially varying diffusion coefficient *Math. Comput.* **36** 375–86



این مقاله، از سری مقالات ترجمه شده رایگان سایت ترجمه فا میباشد که با فرمت PDF در اختیار شما عزیزان قرار گرفته است. در صورت تمایل میتوانید با کلیک بر روی دکمه های زیر از سایر مقالات نیز استفاده نمایید:

لیست مقالات ترجمه شده ✓

لیست مقالات ترجمه شده رایگان ✓

لیست جدیدترین مقالات انگلیسی ISI ✓

سایت ترجمه فا ؛ مرجع جدیدترین مقالات ترجمه شده از نشریات معتبر خارجی