تئوری و روش شناسی

یک رویکرد نیمه مدولار برای برنامه نویسی پویای گسسته

چکیده

توابع نیمه مدولار نقش فزاینده ای در تجزیه تحلیل بسیاری از مسائل بهینه سازی گسسته ایفا می کند. هدف این مقاله، ادامه روند با استفاده از توابع نیمه مدولار و ویژگی های آن ها برای توسعه دوگانگی به منظور برنامه نویسی پویایی گسسته می باشد.

لغات کلیدی: توابع نیمه مدولار، پلی ماترویید ها، برنامه نویسی پویا،دوگانگی

1-مقدمه

دوگانگی، یکی از پیچیده ترین مفاهیم و یکی از مهم ترین ابزار محاسباتی در ریاضیات می باشد. دوگانگی کمک زیادی به تجزیه تحلیل و بهینه سازی می کند. با این حال، در نتیجه ماهیت بازگشتی برنامه نویسی پویا(DP)، نتایج دو گانگی برای DP کاملا محدود است.

بلمن(1،2) اولین بار مفهوم دوگانگی را در برنامه نویسی پویا معرفی کرد. بلمن(1) از ضرایب لاگرانژ برای کاهش فضای حالت استفاده کرد. این به نوبه خود منجر به یک تئوری دوگانگی کلی برای DP نمی شود. با این حال، این مفهوم که بعدا توسط اورت(4) عمومیت پیدا کرد، نقش بسیار مهم و روز افزونی در بهینه سازی گسسته در برابر بهینه سازی مقید(لاگرانژ) ایفا کرده است.

دینکل و پترسون(3) یک تئوری دوگانگی را برای دسته ای از مسائل برنامه نویسی پویا توسعه داده است که دارای توابع بازگشت محدب و توابع انتقال خطی از طریق استفاده از دوگانگی برنامه نویسی هندسی تعمیم یافته است. دینکل و پترسون در رویکرد خود به بررسی مسائل اصلی و دوگانه از حیث فضا های متعامد پرداختند. این رویکرد بدون موانع و مشکلات احتمالی نمی باشد. همان طور که راکفلر(9، 10) عنوان کرده است، این ممکن است یک طرح بسیار موثر نباشد زیرا همیشه منجر به ضرایب لاگرانژین غیر مبهم نمی شود.

هم چنین این طبیعی ترین شرایط را برای مطالعه توابع ارزش بهینه ارایه نمی کند و می تواند ایجاد یک مانع مفهومی در کاربرد روش کند به خصوص اگر یک شبه فضای مشهود در دسترس نباشد. گلین و مورین(6،7) بر این مسئله با یک رویکرد عمومی تر با استفاده از توابع مزدوج غلبه کرده است. جدا از نتایج قبلی و این که سایر محققان متعدد که نکات جالبی را مطرح کرده اند، ظاهرا تا کنون یک تئوری دوگانگی عمومی برای برنامه نویسی پویا توسعه نیافته است.

ما نگاهی بر مسئله کوتاه ترین مسیر بر روی یک شبکه غیر حلقوی جهت دار داریم که یک مسئله نمونه برای برنامه نویسی پویا(DP) می باشد. در این مقاله ما نشان خواهیم داد که چگونه یک دوگانگی را می توان برای فرمولاسیون DP مسئله کوتاه ترین مسئله بدست آورد.

2-مقدمه

فرض کنید که G(V, E) یک شبکه غیر حلقوی جهت دار باشد سپس، رئوس G را می توان طوری شماره گذاری کرد که 1 منبع و N مخزن باشد که N = I V I و به ازای هر $(i, j) \in E$، $i < j$ می باشد. بدون از دست دادن کلیت،فرض کنید که $V = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ باشد. به ازای هر یال $(i, j) \in E$، یک وزن متناظر c_{ij} با $c_{ij} = +\infty$ می باشد اگر $(i, j) \notin \mathrm{E}$ باشد.

به منظور یافتن مسیر با حداقل وزن، می توان از فرمول بازگشتی DP زیر استفاده کرد:

$$f(i) = \min_{i<j} \{c_{ij} + f(j)\}. \qquad (1)$$

در این جا، $f(i)$ بیانگر کوتاه ترین فاصله از i تا مخزن N است. کوتاه ترین مسیر برای گراف G با $f(1)$ و $f(N) := 0$ تعیین می شود.

به منظور توسعه یک دوگانگی DP برای این فرمول، ما از مفاهیم چند وجهی نیمه مدولاریته و نیمه مدولار(8) استفاده خواهیم کرد. به یاد آورید که یک تابع مجموعه ایf بر روی همه زیر مجموعه های یک مجموعه متناهی S تعریف می شود یعنی $f : 2^S \to \mathbb{R}$ که 2^S بیانگر مجموعه ای از همه زیر مجموعه

های S می باشد و در صورتی که شرایط زیر

$$f(A\cup B)+f(A\cap B)\le f(A)+f(B), \quad (2)$$

به ازای همه $A,\ B\subseteq S.$ برقرار باشد نیمه مدولار است. هم چنین می توان یک چند وجهی نیمه مدولار مربوط به تابع F نیمه مدولار غیر منفی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف 1: فرض کنید $f:2^S\rightarrow\mathbb{R},$ باشد و فرض کنید که f نیمه مدولار باشد. چند وجهی نیمه مدولار مربوط به f، $P_f=\{x\in\mathbb{R}^S \mid x(T)\le$ به ازای همه مقادیر $T\subseteq S\}$ است.

توجه داشته باشید که اگر ما $x(T)\ge 0$ را محدود کنیم، آنگاه چند وجهی نامحدود بوده و موسوم به پلی ماترویید است. ویژگی جالب از حیث چند وجهی نیمه مدولار این است که نقطه برخورد دو چند وجهی نیمه مدولار P_f و P_g با سیستم زیر توصیف می شود

$x(T)\le\min\{f(T),\ g(T)\}$ به ازای همه مقادیر T می باشد

بر اساس این توصیف سیستم، یک دوگانگی برای نقطه برخورد دو چند وجهی نیمه مدولار را می توان مشتق کرد. این دوگانگی در زیر توضیح داده شده است.

فرض کنید که f و g توابع نیمه مدولار تعریف شده بر روی $S,\ f(\emptyset)=g(\emptyset)=0.$ باشند. آنگاه شرایط زیر صادق خواهد بود:

$$\max\{1\cdot x \mid x\in P_f\cap P_g\}=\min\{f(A)+g(S-A)\mid A\subseteq S\}. \quad (3)$$

سمت راست معادله 3 ، عملگر همگشت برای توابع مجموعه ای است. تابع کانولشن یا همگشت h به صورت زیر تعریف می شود

$$h(A)=\min_{B\subseteq A}\{g(B-A)+f(A)\}=(g\,\square\,f)(A) \quad (4)$$

به طور کلی، h یک تابع نیمه مدولار نخواهد بود. با این حال اگر f نیمه مدولار و g مدولار در (4) باشد، آنگاه h، نیمه مدولار است.

3-دوگانگی DP برای مسئله کوتاه ترین مسیر

به منظور توسعه یک دوگانگی DP برای مسئله کوتاه ترین مسیر، ما از معادله تابعی ارایه شده توسط (1) و دوگانگی نقطه برخورد چند وجهی نیمه مدولار ارایه شده در(3) استفاده خواهیم کرد. ما ابتدا (1) را از حیث توابع مجموعه ای باز نویسی می کنیم. برای انجام این کار، ما مجموعه های زیر و توابع مجموعه ای را تعریف می کنیم. برای $G(V, E)$ جهت دار و غیر حلقوی، فرض کنید

$$J_i = \{i, i+1, \ldots, N\},\ i \in V = \{1, 2, \ldots, N\}.$$
$$J^0 = \emptyset.$$
$$J^i = \{1, \ldots, i\},\ i \in V = \{1, 2, \ldots, N\}.$$

تابع $f : 2^V \to \mathbb{R}$ را به صورت تابع زیر تعریف کنید:

$$f(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } A = \emptyset, \\ \text{shortest distance from } i \text{ to } N & \text{if } A = J_i, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(کوتاه ترین فاصله از i تا N)، در غیر این صورت

ادعای 1: f نیمه مدولار است.

اثبات: فرض کنید $A,\ B \subseteq V$ باشد. اگر Aو B به گونه ای باشند که $f(A) + f(B) < +\infty$ آنگاه به ازای مقادیری از i داریم: $A = J_i$ و به ازای مقادیری از k داریم: $B = J_k$. بر اساس تعریف یا $J_i \subseteq J_k$ یا $J_k \subseteq J_i$ است. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $J_i \subseteq J_k$ باشد. آنگاه $A \cup B = J_k$، $A \cap B = J_i$ و $f(A) + f(B) = f(A \cup B) + f(A \cap B)$ است. اگر Aو B به گونه ای

باشند که $A \neq J_i$ یا $B \neq J_i$ به ازای مقداری از i باشد آنگاه $f(A) + f(B) = +\infty$ و $f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B)$ برقرار است.

توجه داشته باشید که در این جا $f(A)$ در واقع یک تابع مدولار به ازای همه $A \subseteq V$ به طوری که $f(A) < +\infty$ است. اکنون، توابع مجموعه ای $g_i : 2^V \to R,\ i = 1, \ldots, N-1,$ را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$
g_i(A) = \begin{cases} 0 & \text{if } A = \emptyset, \\ c_{i,k+1} & \text{if } A \cup J^{i-1} = J^k, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}
$$

$$
g_N(\cdot) = 0.
$$

ادعای 2: gi به ازای $i = 1, \ldots, N-1$، نیمه مدولار است.

اثبات: فرض کنید $A,\ B \subseteq V$ باشد. اگر A و B به گونه ای باشند که $g_i(A) + g_i(B) < +\infty$ ، آنگاه به ازای مقداری از K برابر با $A \cup J^{i-1} = J^k$ و به ازای مقداری از P برابر با $B \cup J^{i-1} = J^p$ است. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید که $J^k \subseteq J^p$. است. از آن جا که $(A \cup J^{i-1}) = J^k$ و $(B \cup J^{i-1}) = J^p$ و $J^k \subseteq J^p$ می باشد، می توان گفت که $(A \cup B) \cup J^{i-1} = J^p$ می باشد. لذا، $g_i(A \cup B) = c_{i,p+1}$ می باشد. هم چنین، $(A \cap B) \cup J^{i-1} = J^k$ که به طور ضمنی بیانگر $g_i(A \cap B) = c_{i,k+1}$ است. از این روی $g_i(A) + g_i(B) = g_i(A \cup B) + g_i(A \cap B)$ می باشد. اگر A و B به گونه ای باشد که $g_i(A) + g_i(B) = +\infty$، آنگاه $g_i(A) + g_i(B) \geq g_i(A \cap B) + g_i(A \cup B)$, می باشد. □

با توجه به تعریف، $f(J_i)$ کوتاه ترین مسیر از i به N است. می توان $f(J_i)$ را در بازگشت DP به صورت زیر نوشت:

$$f(J_i) = \min_{A \subset J_i} \{g_i(J_i - A) + f(A)\}. \tag{5}$$

توجه داشته باشید که مقدار کمینه نسبت $A \subset J_i$ وجود دارد زیرا $A = J_i$ به تابع همانی $f(J_i) = f(J_i)$ می انجامد. هم چنین به یاد داشته باشید که سمت راست (5) تنها همگشت دو تابع نیمه مدولار است. با این حال در این رابطه، همگشت در برابر یک تابع نیمه مدولار قرار دارد زیرا تابع f است.

ادعای 3: $f(J_i) = \min_{A \subset J_i}\{g_i(J_i - A) + f(A)\}$ ، کوتاه ترین مسافت یا فاصله را از i تا N را در شبکه غیر حلقوی جهت دار $G(V, E)$ ایجاد می کند.

اثبات: برای این که $f(J_i) \neq +\infty$ باشد، مقدار حداقل یا کمینه باید در مجموعه $J_{i+k},\ k = 1, \dots, N-i,$ رخ دهد در غیر این صورت $f(A) = +\infty$ می باشد. در صورتی که مینیمم در $A = J_{i+k}$ به ازای $k \leq N - i$ اتفاق بیفتد آنگاه

$J_i - J_{i+k} = \{i, i+1, \dots, i+k-1\}$ و $(J_i - J_{i+k}) \cup J^{i-1} = \{1, 2, \dots, i+k-1\}$ می باشد.

لذا، $g_i(J_i - A) = c_{i,i+k}$ می باشد. در صورتی که $(i, i+k)$ وجود نداشته باشد، $c_{i,i+k} = +\infty$ و مینیمم حاصل نخواهد شد. از این روی $g_i(J_i - A)$ تنها آن دسته از مقادیر رئوس بدون یال i را بدست خواهد داد. از این روی در فرمول بازگشتی ارایه شده در معادله(5) ما به ازای $k,\ g_i(J_i - A) = c_{i,i+k},\ (i, i+k) \in E$ و $f(J_{i+k}) < +\infty$ خواهیم داشت:: $A = J_{i+k}$

چون $f(J_{i+k})$ کوتاه ترین فاصله از $i + k$ تا N و $g_i(J_i - J_{i+k}) = c_{i,i+k}$ می باشد بر اساس اصل بهینگی می توان گفت که مقدار مینیمم یا کمینه به دست آمده با معادله زیر

$$\min_{A \subset J_i} \{g_i(J_k - A) + f(A)\} = c_{i,i+k} + f(J_{i+k}),$$

به ازای مقداری k، کوتاه ترین فاصله از i تاN خواهد بود.□

اکنون می توان یک دوگانگی DP را بر اساس این فرمول بیان کرد. کوتاه ترین فاصله از منابع، گره 1 تا مخزن، گره N در فرم تابع مجموعه ای بامعادله زیر $f(V) = \min_{A \subset V} \{g_1(V-A) + f(A)\}$ بدست می آید که تنها یک اپراتور همگشت بین دو تابع نیمه مدولار است. لذا:

$$\min_{A \subset V} \{g_1(V-A) + f(A)\} = \max\{1 \cdot x \mid x(T) \le \min\{g_1(T), f(T)\}, T \subseteq V\}. \qquad (6)$$

میباشد.

با این حال چون نقطه برخورد g_i و f به ازای $i = 1, \ldots, N$ ، یک تابع نیمه مدولار است، سمت راست معادله یعنی دوگانگی، را می توان به صورت زیر نوشت

$$\max\{1 \cdot x \mid x(T) \le \min\{g_1(T), g_2(T), \ldots, g_N(T), f(T)\}, T \subseteq V\}, \qquad (7)$$

که توسط لواسز(8) نشان داده شد.

هدف توسعه معادله (7) این است که مقادیر $g_i(T)$ بر اساس ضرایب هزینه ای معلوم است. به منظور استفاده از (6)، آگاهی قبلی از کوتاه ترین فاصله از هر گره تا مخزن لازم است. می توان نشان داد که محدودیت های تولید شده توسط کوتاه ترین طول مسیر یعنی $f(T)$ در معادله(7) به صورت افزونه است.

4- مثال

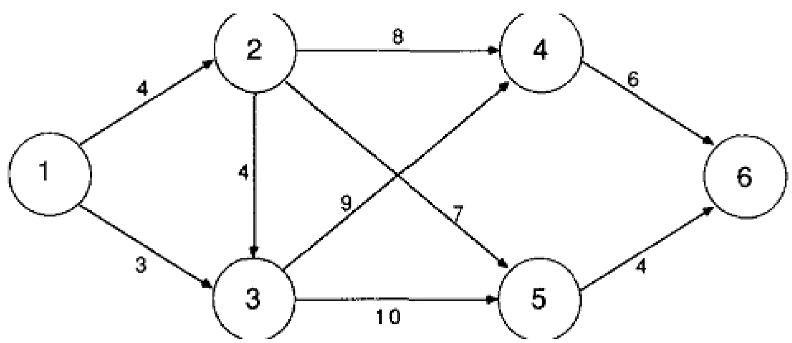
برای گراف نشان داده شده در شکل 1، ما ارزیابی های تابعی زیر را داریم. آن دسته از مجموعه هایی که مادیر تابع برای آن ها اختصاص داده نشده است، شامل موارد زیر هستند:

$+\infty.\ g_1(\{1\}) = 4,\ g_1(\{1, 2\}) = 3;\ g_2(\{2\}) = 4,\ g_2(\{2, 3\}) = 8,\ g_2(\{2, 3, 4\}) = 7;\ g_3(\{3\}) = 9,$

$g_3(\{3, 4\}) = 10;\ g_4(\{4, 5\}) = 6;\ g_5(\{5\}) = 4;\ g_6(\cdot) = 0;\ f(\{6\}) = 0,\ f(\{5, 6\}) = 4,$

$$f(\{4, 5, 6\}) = 6,\ f(\{3, 4, 5, 6\}) = 14,\ f(\{2, 3, 4, 5, 6\}) = 11,\ f(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = 15$$

ما باید یک $x(T) \leq \min\{g_1(T), \dots, g_6(T),\ f(T)\}$ را تعریف کنیم که $x \in \mathbb{R}^V,\ x(T) = \sum_{e \in T} x(e)$ می باشد. در این جا e بیانگر تک مولفه T، $x(e)$ بیانگر جزء می باشد. یعنی اگر $T = \{1, 4, 6\}$ باشد، آنگاه $\sum x(e) = x_1 + x_4 + x_6$ است. هم چنین به یاد بیاورید که V مجموعه ای از رئوس است. از این روی، ماکزیمم مقادیر محتمل به ازای $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6)$ به صورت $x_{\max} = (4, 4, 9, \infty, 4, 0)$، بر اساس مجموعه های $\{1\},\ \{2\}, \dots, \{N\}$ می باشد. با این حال، ما هم چنین باید سایر مجموعه ها و محدودیت های آن ها را در نظر بگیریم. با در نظر گرفتن این موارد، ما $x = (4,\ -1, 8, 0, 4, 0)$ را به صورت ماکزیمم $1 \cdot x$ بدست می آوریم.



شکل 1: یک گراف غیر حلقوی جهت دار

این مقدار را می توان با حل LP متناظر مسئله بدست آورد. در این صورت، LP به صورت زیر نشان داده می شود

(DLP)

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

مشروط به این که

$$x_1 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$x_2 \le 4,$$
$$x_2 + x_3 \le 8,$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \le 7,$$
$$x_3 \le 9,$$
$$x_3 + x_4 \le 10,$$
$$x_4 + x_5 \le 6,$$
$$x_5 \le 4,$$
$$x_6 \le 0,$$

Xi نامحدود باشند.

توجه کنید که این LP از محدودیت های تحمیل شده توسط ارزیابی های تابع f استفاده نمی کند زیرا آن ها افزونه هستند.

5- تجزیه تحلیل مسئله دوگانگی

توجه کنید که DLP دارای ساختار تک مدولی باشد و لزوما محدود به مقادیر صحیح نباشد. این موضوع قابل پیش بینی است زیرا تئوری چند وجهی نیمه مدولار می گوید که نقطه برخورد دو چند وجهی نیمه مدولار صحیح دارای رئوس صحیح خواهد بود. با این حال به دلیل ساخت همگشت، آن چه که داریم، تضمین این است که نقطه برخورد دو چند وجهی نیمه مدولار مجددا به صورت چند وجهی نیمه مدولار تبدیل می شود. از این روی، می توان $1 \cdot x$ را در نقطه برخورد همه چند وجهی های نیمه مدولار متناظر، بیشینه سازی کرد یعنی

$\left(P_{g_1} \cap P_{g_2} \cap \cdots \cap P_{g_N} \cap P_f\right)$ و هنوز می تواند رئوس صحیح(درست) تضمین شده باشد.

برای بدست آوردن دوگانگی واقعی DP، باید این DLP را به صورت یگ گام اضافی در نظر بگیریم. شکل عمومی DLP به صورت زیر است:

(DLP1)

$$\begin{array}{ll} \max & 1 \cdot x \\ \text{s.t.} & Ax \leq c \\ & x \text{ unrestricted.} \end{array}$$

در صورتی کهx را محدود کنیم، یعنی مجموعه $x = u - w,\ u \geq 0,\ w \geq 0,$ ، می توان

(DLP2)

$$\begin{array}{ll} \max & 1 \cdot (u - w) \\ \text{s.t.} & Au - Aw \leq c \\ & u \geq 0, \quad w \geq 0 \end{array}$$

را بدست آورد.

برای سهولت نشان دادن، فرض کنید $z = (u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_n),\ B = (A,\ -A),$ و $e = (1, \ldots, 1,\ -1, \ldots, -1).$ باشد. سپس مسئله به صورت زیر است:

(DLP3)

$$\begin{array}{ll} \max & e \cdot z \\ \text{s.t.} & Bz \leq c \\ & z \geq 0 \end{array}$$

درستی z به طور ضمنی از طریق تک مدولاریته A تضمین می شود. با این حال اگر ما به طور صریح بیان کنیم که Z باید صحیح باشد، آنگاه DLP3 یک مسئله نوع کوله پایشی چند بعدی بوده و ما یک فرمولاسیون DP را به ازای DLP3 داریم که در زیر نشان داده شده است

$$\max\ f_i(y) = \max_{z_i \in Z_i(y)} \left\{ e_i z_i + f_{i-1}(y - b_i z_i) \right\}$$

که bi، i امین ستون B، B $m \times 2n$ ، y، بردار m می باشد که در آن $y \le c$ و $Z_i(y) =$ $\{0, 1, \ldots, \min_j([y_j/b_{ji}])\}$ می باشد. هم چنین شرایط مرزی $f_0(y) = 0.$ وجود دارد.

از این روی، از حیث دوگانگی DP، ما دوگانگی بازگشت DP مسئله کوتاه ترین مسیر را داریم که بازگشت DP از مسئله کوله پشتی است. این بسیار جذاب است زیرا ما می دانیم که یک مسئله کوله پشتی یک بعدی را می توان به صورت یک مسئله طولانی ترین مسیر فرموله و حل کرد. این دوگانگی بیشتر با این نتایج تاکید میشود.

دیگر رابطه جالب از مسئله دو گانگی را می توان با بررسی LP موجود پیدا کرد. همان طور که وگنر(11) عنوان کرده است، بازگشت DP برای مسئله کوتاه ترین مسیر در واقع، دوگانگی فرمولاسیون مسئله کوتاه ترین مسیر LP را حل می کند.

مسئله کوتاه ترین مسیر برای گراف غیر حلقوی جهت دار به صورت زیر می تواند فرموله شود:

(SRP)

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum \sum c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_j x_{kj} - \sum_i x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ is source}, \\ 0 & \text{other}, \\ -1 & \text{if } k \text{ is sink}, \end{cases} \\ & x_{ij} \ge 0. \end{aligned}$$

اگر K منبع باشد

در غیر این صورت

اگر K مخزن باشد

در صورتی که نگاهی بر مسئله نمونه و DLP داشته باشیم، می بینیم که این فرمولاسیون یک شکل اساسی مشابه با دوگانگی برای SRP است. سمت راست DLP توسط Cij ارایه شده و یک محدودیت برای هر یال در گراف وجود دارد. این مشابه با بسته بندی بیشینه مجموعه (s, t) می باشد که توسط فولکرسون(5

ارایه شده است. یعنی یک محدود کننده برای هر یال وجود دارد ولی این فرمولاسیون تنها دارای یک متغیر به ازای هر گره است و متغیر ها نامحدود هستند. در صورتی که ما بسته بندی بیشینه مسئله برش (s,t) برای این مثال را فرموله کنیم، فرمولاسیون MPLP نشان داده شده در زیر را بدست می اوریم. به یاد داشته باشیم که یک متغیر به ازای هر برش وجود دارد.

(MPLP)

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{i=1}^{|K|} x_i \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4, \\
& x_1 + x_9 + x_{10} + x_{11} \leq 3, \\
& x_9 + x_{10} + x_{11} \leq 4, \\
& x_2 + x_3 + x_6 + x_8 \leq 9, \\
& x_2 + x_4 + x_6 + x_7 \leq 10, \\
& x_3 + x_5 + x_8 + x_{11} \leq 4, \\
& x_4 + x_5 + x_7 + x_{10} \leq 6, \\
& x_6 + x_7 + x_9 + x_{11} \leq 7, \\
& x_6 + x_8 + x_9 + x_{11} \leq 8, \\
& x_i \geq 0,
\end{array}
$$

که K مجموعه ای از همه برش هایی است که s را از t تفکیک میکند که در این مسئله برای آن ها مقدار 11 در نظر گرفته شده است.

همان طور که گفته شد، این مشابه با DLP از حیث سمت راست می باشد ولی از حیث تعداد متغیر ها و محدودیت آن ها متفاوت است. در صورتی که دوگانگی DLP را در نظر بگیریم داریم

(SRP1)

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum \sum c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} & x_{12} + x_{13} = 1, \\
& x_{13} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1, \\
& x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{35} = 1, \\
& x_{25} + x_{35} + x_{46} = 1, \\
& x_{46} + x_{56} = 1, \\
& x_{ij} \geq 0,
\end{array}
$$

که یک فرمولاسیون متفاوت از مسئله کوتاه ترین مسیر است. در این فرمول، هر محدود کننده نشان دهنده یک برش خاص در شبکه است. محدود کننده i بیانگر برشی است که مجموعه هایی از گره های $(1,\ldots,i)$ و $(i+1,\ldots,N)$ را تفکیک می کند. با این حال توجه کنید که این معرفی خوب از زیر مجموعه های برش ها تنها به دلیل شیوه شماره گذاری گره ها اتفاق افتاده است. به طور کلی، این زیر مجموعه ای از برش هایی که برنامه خطی را تشکیل می دهد نخواهد بود.

به طور کلی، به ازای دوگانگی DP بیان شده، ما دوگانگی ها را به دو فرمول متفاوت از مسئله کوتاه ترین مسیر حل می کنیم. این مورد در زیر نشان داده شده است. فرض کنید که 1 گره منبع و N گره مخزن باشد. آنگاه به ازای DP اصلی داریم:

$$\begin{aligned}&\text{(SRP)}\\&\min \sum \sum c_{ij} x_{ij}\end{aligned}$$

مشروط به این که

$$\sum_{(k,j)} x_{kj} - \sum_{(i,k)} x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{if } k \text{ is source,} \\ 0, & \text{other,} \\ -1 & \text{if } k \text{ is sink,} \end{cases}$$
$$x_{ij} \geq 0,$$

اگر K منبع باشد،

در غیر این صورت

اگر K مخزن باشد

$$\begin{aligned}&\text{(DSRP)}\\&\max\ -y_n + y_1\end{aligned}$$

مشروط به این که

$$y_i - y_j \le c_{ij},$$

y_k نامحدود باشد.

و مسئله بازگشت DP به ازای کوتاه ترین مسیر حل شود(DSRP).

به ازای DP دوگانگی داریم:

$$\text{(SRP1)}$$
$$\min \ \sum \sum c_{ij} x_{ij}$$

مشروط به این که

$$Ax = 1,$$
$$x_{ij} \ge 0,$$

$$\text{(DLP)}$$
$$\max \ \sum_i y_i$$

مشروط به این که

$A^{T}y \le C$، Y نامحدود باشد و   DLP حل فرمول DP دوگانه بعد از Y محدود باشد.

این LP ها و دوگانگی های آن ها از این جهت جالب هستند که ما دو فرمولاسیون متفاوت را می بینیم که نزدیک به یک دیگر هستند ولی فرمول های بازگشتی متفاوتی را برای حل دو گانگی ها ارایه می کنند. به علاوه، این دوگانگی ها، DSRP و DLP نسبت به یک دیگر از حیث بازگشت DP دوگانه هستند.

6-نتیجه گیری

نشان داده شده است که امکان توسعه یک دوگانگی DP از طریق مسئله کوتاه ترین مسئله وجود دارد. سپس دوگانگی به یک مسئله کوله پشتی چند بعدی تبدیل می شود. این خود دارای حس شهودی است زیرا مسئله

کوله پشتی یک بعدی را می توان به صورت مسئله طولانی ترین مسیر مجددا فرموله کرد. از نظر محاسباتی، این دوگانگی هیچ مزیتی ندارد زیرا مسائل کوتاه ترین مسیر به خوبی حل می شوند. با این حال نتیجه اولیه، توسعه یک دوگانگی است که قبلا برایDP عمومی وجود نداشته است. اگرچه امکان دست یابی به مزیت محاسباتی هنگام بررسی DP به غیر از مسئله کوتاه ترین مسیر و دوگانگی های آن ها وجود دارد. این مسائل و روابط و پیامد ها و اثرات این نتایج مستلزم تحقیقات بیشتری است.

.