تحول مسائل بهینه سازی در مدیریت درآمدها، سیستم صف بندی و مدیریت زنجیره تامین

چکیده

برای مسائل بهینه سازی درآمد در مطبوعات مدیریت درآمدها، مدیریت زنجیره تامین و سیستم ها صف بندی، برخی از فرضیات (مانند تقعر توابع درآمد یا افزایش میزان شکست تامیم یافته) اغلب نیازمند تحلیلی نرم جهت اطمینان از مشکلات هستند. در اینجا نشان داده شده است که این فرضیات ضروری نیستند. بدین منظور، مطالعاتی بر روی مسائل بیشینه سازی درآمد پارامتری جهت یکی کردن برخی از مشکلات در مطبوعات صورت گرفته است. سپس خواستار انتقال به یک زمان پیوسته مشکل مدیریت درآمد شدند و به این نتیجه رسیدند که نتایج یکنواخت در مطالبه تابع و قیمت مجاز مجموعه تاثیر گذار هستند. همچنین خواستار تغییر روش در مطالعه یک مشکل به حداقل رساندن هزینه پارامتری و بیشتر خواستار روشی برای مشکلات کنترل بهینه در سیستم های صف بندی و کنترل موجودی در یک زنجیره تامین با قرارداد تک قیمت شدند.

مقدمه

مشکلات بهینه سازی درآمد از جمله مدیریت درآمد (گالگو و ون Ryzin، 1994)، سیستم های صف بندی بهینه (لیپمن ، 1975) و مدیریت زنجیره تامین (Lariviere و Porteus مفتخر ، 2001) اغلب در مطبوعات ظاهر می شوند. برای اطمینان از مشکلات تحلیلی نرم اغلب نیاز به برخی از فرضیات وجود دارد. خلاصه و بحث ضیاء و همکاران (2004) در مورد سه فرض معروف در مطبوعات ارائه شده است. اولین آن دو به ترتیب، تقعر تابع درآمد با تقاضا و قیمت هستند و سوم افزایش تعمیم یافته میزان شکست (IGFR) تابع توزیع تقاضا، تحت هر تابع درآمدی تک مدی است. ضیاء و همکاران (2014) نشان دادند که هیچ یک از این

فرضیات به دیگری اشاره نمی کند. به نظر می رسد که این فرضیات در مقالات در رابطه با مدیریت درآمد ، موجودی و قیمت گذاری در مدیریت زنجیره تامین ، خدمات شبکه، مزایده و مکانیزم طراحی و رقابت قیمت می باشد (ضیا و همکاران، 2004). هرچند به این فرضیات آن طور که در این مقاله نشان داده شده است، نیازی نیست.

برای اولین بار مسئله بهینه سازی درآمد پارامتری برای متحد کردن چندین مشکل بهینه سازی درآمد مورد بحث در مطبوعات، نشان داده شد. بدون مفروضات ارائه شده در مطبوعات، مسائل به یک ساختار به خوبی سازمان یافته معادل در هر یک از تابع درآمد در حال افزایش، مستمر و مقعر تبدیل شده است. بنابراین، نتیجه مسائل بهینه سازی، تحلیلی نرم است. در اینجا تغییر به صورت الگوریتمی است. این مشکل و نتایج توسط کنترل بهینه ورودی به سیستم صف، نشان داده شده است که به ضیاء و همکارانش مرتبط نمی شود (2004).

سپس خواستار تحول در مطالعه زمان پیوسته مدیریت درآمد شدند. مدیریت درآمد در رابطه با قیمت گذاری و مشکلات تخصیص در بسیاری از آیتم ها صنایع فروش سهام ثابت می باشد که با کنترل قیمت فراتر از یک افق فکری محدود است. این صنایع شامل فروش صندلی های خطوط هوایی قبل از خروج هواپیما ها، هتل ها، اجاره اتاق ها قبل از نیمه شب و خرده فروشان، فروش فصلی اقلام با زمان تدارکات طولانی است. مطالعه در مورد قدمت مدیریت درآمد به Littlewood (1972) برای گذراندن تصادفی و مشکل تک پا بودنش در خطوط هوایی بر می گردد. لی (1988) مدل زمان مداوم همراه با یک پواسون کنترل روند، ارائه کرد. گالگو و ون رایزین (1994) زمان پیوسته مدیریت درآمد ها را مطالعه کردند که در آن تقاضا (مشتریان) با توجه به فرایند پواسون همگن با قیمت مربوط به نرخ تقاضا و قیمتی انتخابی از مجموعه($0,\infty$]را داشتند. آنها تابع تقاضا منظمی را در نظر گرفتند که، تابع درآمد مربوطه (به عنوان مثال ، قیمت بار نرخ تقاضا) به طور مداوم، محدود و تابع مقعر سطح تقاضا است و به عنوان نرخ تقاضا به سمت صفر تمایل دارد. با استفاده از تابع تقاضا منظم، آنها یکنواختی و تقعر درآمد مورد انتظار مطلوب و یکنواختی سیاست های قیمت گذاری مطلوب را نشان می دهند.

کار گالگو و ون رایزین (1994)در چند جهت توسعه داده شده است: (1) به عنوان مثال فرض تقاضا منظم، در ژائو و ژنگ (2000) و وی و هو (2002) ؛ (3) برای مثال، مطالعه مشکلات مدیریت درآمد در محیط های شبکه ، همکاران جنرال الکتریک Dai et al (2005) Graf and Kimms (2013). (4) برای مثال، مطالعه مدیریت درآمد چند دوره Talluri و ون رایزن (2014) و دو و همکاران (2005) و (5) به مطالعه مدیریت درآمد در محیط های رقابتی ، برای مثال، در Netessine وShumsky (2015) ، هو و همکاران (2010)، هوانگ همکارانش (2013) و وی و همکاران (2013).

درخواست انتقال مطالعه یک زمان پیوسته مشکل مدیریت درآمد در راستای اهداف اول و دوم اشاره شده در بالا است. با یک تابع تقاضای عمومی (که شاید نه نزولی و نه مقعر باشد) و قیمت مجاز دلخواه مجموعه (که به عنوان مثال می تواند یک بازه ی زمانی، یک مجموعه گسسته و یا حتی ترکیبی از فواصل و نقاط گسسته باشد) می توان نشان داد که مشکل را می توان به یک معادل تبدیل کرد که در آن تابع درآمد پیوسته و مقعر و صعودی باشد (به عنوان مثال تابع تقاضا مربوط منظم است). بنابراین به طور مستقیم با استناد به نتایج در مطبوعات به عنوان مثال ، گالگو و ون Ryzin (1994) و وی و هو (2002)، ویژگی های یکنواخت معمول از سیاست های مطلوب و تقعر تابع ارزش مطلوب را می توان دریافت. از این رو این خواص یکنواخت بر تابع تقاضا و مجموعه قیمت مجاز تاثیر گذار هستند.

مدیریت زنجیره تامین نیز ناحیه ای مربوط به مشکلات درآمد حداکثر می باشد. Lariviere و Porteus (2001) قرارداد تک قیمتی ساده ای را مطالعه کردند که در آن تولید کننده برای اولین بار تصمیم به قیمت عمده فروشی می گیرد و پس از آن خرده فروشان تصمیم به مقدار سفارشی بر اساس تقاضا تصادفی می گیرند. مشکلی که تولید کننده با آن مواجه می شود، پیچیده است. تحت IGFR ، نشان داده شد که تابع درآمد تولید کننده تک مدی است و پس از آن یک راه حل بهینه را می توان به طور تحلیلی به دست آورد. مسائل بالا دوباره مطالعه شد و نشان داده شد که مشکلات تولیدکنندگان به طور تحلیلی و بدون IGFR قابل حل شدن است.

تغییر روش مشکل بهینه سازی قیمت پارامتری گسترش یافته است و معادلی بدست آمده است که در آن تابع هزینه در حال افزایش، مستمر و محدب است. یکی از نرم افزار های معمول مسئله بهینه سازی قیمت کنترل نرخ خدمات در سیستم های صف بندی است. به گفته Stidham (2002) ، دستگاه لیپمن (لیپمن ، 1975) دروازه هایی را بر روی برنامه های تئوری پردازش تصمیم گیری مارکوف در رابطه با مشکلات کنترلی صف بندی باز کرده است. ایده دستگاه لیپمن، تبدیل پروسه اساسی مارکوف به یک معادل می باشد که در آن زمان انتقال متغیرهای تصادفی با یک پارامتر ثابت به صورت نمایی هستند.

با استفاده از دستگاه خود ، لیپمن (1975) مسائل بهینه سازی در سیستم های صف بندی نمایی را مطالعه کرد. پس از آن برای مشکل کنترل بهینه ورودی ها، هلم و Waldmenn (1984) یک چارچوب کلی با چند سرور صف در یک محیط تصادفی را بررسی کردند. برای کنترل بهینه میزان خدمات، جو و Stidham (1983) مشکلات بهینه سازی را در 1/G/M مطالعه کردند. Stidham و وبر (1989) مشکل کنترل خدمات و / یا میزان ورود در صف را در نظر گرفتند، که با اهداف به حداقل رساندن هزینه مورد انتظار کل برای رسیدن به حالت صفر و متوسط حداقل هزینه بیش از یک افق بی نهایت است. آنها ثابت کردند که یک سیاست بهینه در تعداد مشتریان در سیستم، یکنواخت می باشد. جزئیات را در مقالات بررسی ببینید (Stidham، 1985، 2002). با این حال در مطبوعات، مهار شدن به صورت تحلیلی مسائل بهینه سازی نگرانی محسوب نمی شد، هر چند در محاسبه سیاست های مطلوب بسیار مهم بود. با استفاده از روش تغییر، مشکل مهار تحلیلی کنترل نرخ خدمات مطلوب در سیستم های صف بندی حل شد.

بقیه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. در بخش 2، مدل بیشینه سازی مسئله درآمد پارامتری و تبدیل آن به یک ساختار خوب معادل با تابع درآمد منظم ارائه شده است. سپس در بخش 3، خواهان تغییر مطالعه مشکل مدیریت درآمد مستمر و بدون فرض در تابع تقاضا شدند. در بخش 4، روش تغییر مطالعه دوباره زنجیره

تامین قرارداد تک قیمتی اعمال می شود. در بخش 5، روش تغییر مطالعه مشکل به حداقل رساندن هزینه تعمیم داده شد و به بهینه سازی مشکل در سیستم های صف بندی اعمال شد. بخش 6 بخش پایانی است.

2- مشکلات درآمد حداکثر پارامتری

در این بخش ابتدا مشکلات درآمد حداکثر پارامتری ارائه می شود. بدون شرایط معمول ارائه شده در مطبوعات، آن به معادلی که در آن تابع درآمد در حال افزایش، مستمر و مقعر است، تبدیل شد.

2.1. مدل

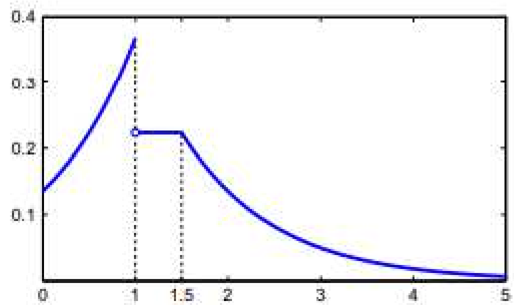
این مدل بر اساس فرمول قیمت تقاضا نسبتا استانداردی برای محصول (یا خدمات) است. رابطه شناخته شده ریاضی بین قیمت و تقاضا وجود دارد. X نشان دهنده قیمت و y نشان دهنده تقاضا است (تقاضا در یک دوره زمانی ، و یا در هر واحد زمان).

در این مدل، یک پارامتر t از مجموعه ای غیر تهی T وجود دارد. T احتمالا نشان دهنده وضعیت دوران تصمیم گیری می باشد.

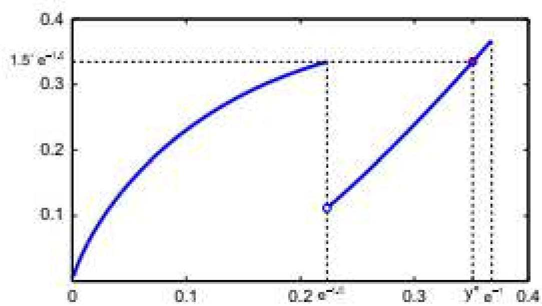
نیاز به هیچ ساختاری برای t نیست بنابراین ممکن است t نشان دهنده پارامترهای چندگانه باشد. فرض کنید که برای هر T، قیمت X از یک مجموعه غیر تهی P انتخاب شده و متناظر با آن تقاضا نامنفی $d(X)$ را دریافت کرده است (که تابع تقاضا نامیده می شود). این یک فرضیه ابتدایی است که p یک مجموعه محدود است. این فرضیه در بیان قسمت 4 که در زیر آمده است فرو خواهد نشست. سپس درآمد $d(x)x$ دریافت می شود. علاوه بر این، به دنبال تحقق تقاضای $d(x)$ ، قیمت $d(x)\ \lambda(t)$ می باشد. در اینجا، $\lambda(t)$ نامنفی است و می تواند به عنوان هزینه واحد فرصت برای انتخاب x در t تفسیر شده باشد. از این رو اگر X از t انتخاب شود، سود $d(x)x\ \ d(x)\lambda(t)$ (به عنوان تابع درآمد نامیده می شود) دریافت می شود.

$$\sup_{x \in P}\{d(x)x \quad d(x)\lambda(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1}$$

توجه داشته باشید که این در واقع یک خانواده از مشکلات بیشینه سازی است. بعدا یک مثال از $\lambda(t)$ در مدیریت درآمد ارائه خواهد شد. ما خواستار دریافت راه حل بهینه x_t^* برای مشکل (1) برای هر $t \in \mathcal{T}$ هستیم. برای راحتی، زمانی که هیچ سردرگمی را نمی توان استنتاج کرد فرض شود که x_t^* برای مشکل (1) بهینه یا به سادگی بهینه است.



شکل 1



شکل 2

2.2. تبدیل

مسائل بیشینه سازی با توجه به مراحل زیر مطالعه شد. ابتدا مجموعه ای از قیمت P کاهش داده شد به طوری که d(X)

یک تناظر یک به یک بین قیمت X و تقاضا Y می باشد: برای برخی از توابع p(y) داریم y=d(x) و x=p(y).

بنابراین می توان متغیر را از قیمت X به تقاضا y=d(x) تغییر داد. سپس دامنه تابع درآمد r(y)=y p(y) در حالی که تابع صعودی است کاهش داده می شود. در نهایت r(y) به یک تابع مقعر اصلاح می شود.

مرحله اول: معادلی با متغیر تقاضا که توسط مجموعه زیر تعریف می شود که مجموعه ای از تقاضا هایی است که تحت برخی قیمت ها در p مجاز شده اند.

$\Lambda \equiv \{d(x)|x \in P\}$. برای تقاضا ها دیگر که $y \in \Lambda$، توسط مجموعه زیر تعریف می شود که مجموعه ای از قیمت هایی است که عملکرد متغیر تقاضای y است. $P(y) \equiv \{x \in P|d(x) = y\}$ یقینا مجموعه p(y) شامل چند قیمت است. این کافی است که معادله زیر را یکی از بزرگترین معادلات در نظر بگیریم.

$p(y) := \sup P(y)$

در اصل موضوع زیر بیان می دارد که برای بیشینه سازی مسئله (1) در مجموعه p(y) ، p(y) کافی است که جهت راحتی به صورت زیر تعریف می شود.

$$b(x,t) = d(x)x \quad d(x)\lambda(t)$$

لم 1. برای هر y€Λ فرض کنید $p(y) \in P(y)$ سپس برای همه $b(p(y),t) \geq b(x,t)$,

$x \in P(y) \; and \; t \in \bar{\mathcal{T}}$,

که حالت تساوی اگر و تنها اگر y=0 یا x=p(y) برقرار باشد، حاصل می شود.

اثبات. برای هر $y \in \Lambda$ فرض کنید $p(y) \in P(y)$، برای هر $x \in P(y)$ چون d(x)=y و d(p(y))=y داریم:

$b(x,t) = d(x)[x \quad \lambda(\quad t)] = d(p(y))[x \quad \lambda(t)]$. با توجه به حداکثر p(y) نامعادله زیر را خواهیم داشت:

$$b(x,t) \leq d(p(y))[p(y) \quad \lambda(t)] = b(p(y),t) \quad \text{for} \quad t \in \mathcal{T}$$

قطعا نامعادله بالا تبدیل به تساوی خواهد شد اگر و تنها اگر y=0 یا x=p(y) .

شرط $p(y) \in P(y)$ در عمل در قیاس منطقی بالا قابل توجیه می باشد. در حقیقت همانطور که در بیانات زیر آمده است این شرط بسیار ضعیف است.

تبصره 1. تحت هر یک از شرایط زیر خواهیم داشت: $p(y) \in P(y)$

A. P(y) مجموعه متنهاهی باشد. این مطلب در بسیاری از موارد عملی درست است به ویژه هنگامی که P محدود است.

B. d(x) در مجموعه بسته قیمت p پیوسته باشد. در این مورد p(y) نیز پیوسته است بنابراین

$$p(y) \in P(y) \text{ for each } y \in \Lambda.$$

C. d(x) نزولی و از سمت چپ پیوسته و محدود و $d(\infty):=\lim_{x\to\infty} d(x) = 0.$

در این مورد نیز p(y) به ازای هر y بسته است. قرار دهید D=d(0) سپس d(x) می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$d(x) = D(1 \quad F(x)) \quad \text{for } x \geq 0 \tag{2}$$

که در آن $F(x) = P\{\xi < x\}$ برای برخی از متغیر های تصادفی ξ یک تابع تجمعی (d.f.) می باشد.

در این مورد ممکن است D شماره پتانسیل مشتری ها تفسیر شود؛ در صورتی که قیمت به عنوان مجموعه x بیان شود، هر مشتری بالقوه اقدام به خرید یک آیتم از محصول با احتمال F(x) می کند. از این رو d(x) که تقاضا مورد انتظار است قیمت x را می دهد و F(0) تابع توزیع تجمعی است که بیانگر تمایل به پرداخت مشتریان می باشد. از این رو برای هر y

$$p(y) \in P(y)$$

ضیاء و همکاران (2004)، d(x) و بنابراین F(x)، نیاز به دو بار دیفرانسیل گرفتن دارند. پس از اظهارات بالا در سراسر این بخش فرض کنید به ازای هر $y \in \Lambda$ داریم $p(y) \in P(y)$.

با توجه به قیاس منطقی 1 ، مجموعه قیمت زیر به عنوان زیر مجموعه ای از مجموعه اصلی p در نظر گرفته می شود.

$$P_1 = \{p(y) | y \in \Lambda\}$$

بدین ترتیب مسئله بیشینه سازی (1) را می توان به صورت زیر معادل سازی کرد:

$$\sup_{x \in P_1} \{d(x)[x \quad \lambda(t)]\}, \quad t \in \mathcal{T}.$$

در حال حاضر یک تناظر یک به یک بین قیمت های P1 و تقاضا در Λ وجود دارد و P(y) تابع معکوس d(x) است.

بنابراین می توان به نوبت تقاضای Y را به عنوان متغیر تصمیم گیری در نظر گرفت. درآمد را به عنوان تابع تقاضا به صورت r(y)=y p(y) تعریف کنید. از این رو مسئله بیشینه سازی 1 به صورت زیر معادل می شود:

$$\sup_{y \in \Lambda} \{r(y) \quad y\lambda(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}. \qquad (3)$$

بدین ترتیب $x \in P$ راه حل بهینه $(1)_t$ است اگر و تنها اگر برای هر $t \in \mathcal{T}$ ، y=d(x) یک راه حل بهینه برای $(3)_t$باشد. در اینجا متغیر تصمیم گیری به جای قیمت x در (1) تقاضای y می باشد که جهت راحتی به صورت زیر تعریف می شود: $B(y,t) = r(y) \quad y\lambda(t)$

مطمئنا، تابع B(y,t) ساده تر از تابع درآمد اصلی در (1) می باشد. بنابراین در ادامه با معادله (3) سر و کار خواهیم داشت.

هر چند مسئله بیشینه سازی (3) از مشتق مسئله اصلی (1) گرفته شده است، مسئله (3) خود ممکن است یکی از مسائل اصلی باشد به عنوان مثال، در بهینه سازی سیستم های صف مورد مطالعه در لیپمن (1975).

در ادامه مسئله بیشینه سازی (3) بدون هیچ شرطی بر روی r(y) و Λ مورد مطالعه قرار می گیرد.

گام دوم: تابع درآمد بودن افزایش. در ابتدا لم زیر را دنبال می کنیم.

لم 2. برای هر تقاضای $y_1, y_2 \in \Lambda$ with $y_1 < y_2$ و

$r(y_1) > r(y_2),\ B(y_1, t) > B(y_2, t)$ for all $t \in \mathcal{T}$

بنابراین تقاضای y_2 برای مسئله (3) بهینه نمی باشد.

اثبات. برای هر $y_1, y_2 \in \Lambda$ که $y_1 < y_2$ و $r(y_1) > r(y_2)$ ، به دلیل نامنفی بودن $\lambda(t)$ ، $B(y_1, t) = r(y_1) \ \ y_1\lambda(t) > \ r(y_2) \ \ y_2\lambda(t) = B(y_2, t)$ for $t \in \mathcal{T}$. از این رو y_2 به ازای هر t بهینه نیست.

ما $y_2 \in \Lambda$ را نقطه نزولی r(y) می نامیم ، اگر $y_1 \in \Lambda$ وجود داشته باشد به طوری که $y_1 < y_2$ و $r(y_1) > r(y_2)$. آنگاه این لم به ما می گوید که تمام نقاط نزولی در Λ بهینه نبوده و بنابراین از مجموعه تصمیم Λ حذف می شود و آن را با نماد Λ_1، مجموعه تصمیم جدید پس از حذف نمایش می دهیم. یعنی

$\Lambda_1 := \{y \in \Lambda | y$ یک نقطه غیرنزولی r(y) است$\}$

یقینا، Λ_1 یک مجموعه ناتهی و $r(y)$ در $y \in \Lambda_1$ صعودی است. وقتی که $r(y)$ در مجموعه بسته $\bar{\Lambda}$ پیوسته است و سوپریمم Λ_1 ، سوپریمم $r(y)$ در $y \in \Lambda$ می باشد. یعنی : $r(\sup \Lambda_1) = \sup_{y \in \Lambda} r(y).$

به دلیل لم 2، مسئله بیشینه سازی 3 و سپس 1، معادل است با:

$$\sup_{y \in \Lambda_1} \{r(y) - y\lambda(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}. \qquad (4)$$

در واقع، $y \in \Lambda$ برای مسئله 3 بهینه است، اگر و تنها اگر y برای مسئله 4 بهینه باشد و $y \in \Lambda_1$ برای هر $t \in \mathcal{T}$،

فرض کنید $\bar{y}^*(t)$ بزرگترین بیشینه ساز 4 باشد، اگر چنین مقداری موجود باشد، آنها ما نتیجه زیر را خواهیم داشت.

گزاره 1. (1) تابع درآمد $r(y)$، صعودی است، پس تقریبا همه جا در $y \in \Lambda_1$، پیوسته است.

(2) اگر $\lambda(t)$، صعودی (یا نزولی) باشد و برای هر t ، موجود باشد، $y^*(t)$ در t صعودی (یا نزولی) است.

اثبات. (1) با توجه به تئوری واقعی (مثلا Zheng و Wang,1980 را ببینید) این مطلب صحیح است.

(2) از خاصیت معروف توابع مدولار، تبعیت می کند.(Topkis, 1998)

در بسیاری از مسائل بیشینه سازی،مثل مدیریت درآمد، صعودی است. در این باره، بعدا بحث خواهد شد. $y^*(t)$ وجود دارد اگر $r(y)$ در یک مجموعه بسته Λ_1، پیوسته باشد. قسمت دوم گزاره بالا، به ما می گوید که وقتی $\lambda(t)$ یکنوا باشد، یکنوایی پاسخ بهینه به تابع درآمد $r(y)$، استوار است. یعنی هرچه تابع درآمد (یا تابع تقاضا در (1)) باشد، پاسخ بهینه $y^*(t)$ به مسئله (3) بصورت صعودی (یا نزولی) خواهد بود پس $p(y^*(t))$ پاسخ بهینه به مسئله (1) بوده و وقتی $\lambda(t)$ نزولی (یا صعودی) باشد، این پاسخ نیز، نزولی (یا صعودی) خواهد بود.

گام III: تقعر تابع درآمد. برای مسئله (4) ما لم زیر را هم خواهیم داشت.

لم 3. برای هر $y_1, y_2, y_3 \in \Lambda_1$ که $y_1 < y_2 < y_3$، با فرض $\alpha = (y_3 - y_2)/(y_3 - y_1)$، اگر $r(y_2) < \alpha r(y_1) + (1-\alpha) r(y_3)$، آنگاه برای همه $t \in \mathcal{T}$، $B(y_2, t) < \max\{B(y_1, t), B(y_3, t)\}$. یعنی y_2 برای هر $t \in \mathcal{T}$، بهینه نیست.

اثبات. برای هر $y_1, y_2, y_3 \in \Lambda_1$ که $y_1 < y_2 < y_3$ و $\alpha = (y_3 - y_2)/(y_3 - y_1)$, $y_2 = \alpha y_1 + (1-\alpha) y_3$. بنابراین وقتی $r(y_2) < \alpha r(y_1) + (1-\alpha) r(y_3)$، داریم:

$$
\begin{aligned}
B(y_2, t) &= r(y_2) \quad y_2\lambda(t) \\
&< \alpha r(y_1) + (1 \quad \alpha) r(y_3) \quad \alpha y_1 \lambda(t) \quad (1 \quad \alpha) y_3 \lambda(t) \\
&= \alpha B(y_1, t) + (1 \quad \alpha) B(y_3, t) \\
&\leq \max\{B(y_1, t), B(y_3, t)\}, \quad t \in \mathcal{T}.
\end{aligned}
$$

بنابراین y_2 در هیچ $t \in \mathcal{T}.$ بهینه نیست.

ما نقطه $y_2 \in \Lambda_1$ را یک نقطه محدب $r(y)$ نامیم اگر $y_1, y_3 \in \Lambda_1$ وجود داشته باشد که در شرایط لم 3 صدق کنند. انگاه لم بالا می گوید که هیچ نقطه محدب $r(y)$ برای هیچ t بهینه نخواهد بود و در نتیجه از مجموعه تقاضا Λ_1 حذف می شود. مجموعه تقاضای بعد از حذف را با نماد Λ_2 نمایش می دهیم. یعنی $\Lambda_2 := \{y \in \Lambda_1 | y$

یک نقطه محدب $r(y)\}$ نیست

بر اساس لم 3، Λ_2 به صورت زیر به دست می آید. برای هر دو نقطهٔ $y_1, y_3 \in \Lambda_1$، همه نقاط منحنی $(y, r(y))$ را که زیر خط اتصال نقطه $(y_1, r(y_1))$ تا نقطه $(y_2, r(y_2))$ قرار می گیرد را حذف کنید. اگر اینفیمم $\Lambda_1 \in \Lambda_1$، آنگاه اینفیمم $\Lambda_1 \in \Lambda_2$ می باشد و همچنین اگر سوپریمم $\Lambda_1 \in \Lambda_1$، آنگاه سوپریمم $\Lambda_1 \in \Lambda_2$ می باشد.اگر Λ_1 بسته باشد، داریم:

$$
\inf \Lambda_1 = \inf \Lambda_2, \quad \sup \Lambda_1 = \sup \Lambda_2. \tag{5}
$$

بنابراین مسئله بیشینه سازی (4) و همچنین مسائل (3) و (1) معادل است با:

$$
\sup_{y \in \Lambda_2} \{r(y) - y\lambda(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{6}
$$

در اینجا، $r(y)$ صعودی و مقعر است و با توجه به Hu and Meng (2000) در $y \in \Lambda_2$ پیوسته است. اکنون، تابع هدف مسئله بالا پیوسته است و در نتیجه اگر دامنه Λ_2 بسته باشد، به بیشترین مقدار می رسد. ما $\overline{\Lambda}_2$ را

مجموعه محصور Λ_2. می گیریم. مقدار $r(y)$ در $y \in \overline{\Lambda}_2 - \Lambda_2$ به خوبی تعریف می شود چون $r(y)$ در $y \in \Lambda_2$ پیوسته است. در حقیقت، برای هر $y_0 \in \overline{\Lambda}_2 - \Lambda_2$ با هر دنباله $\{y_n\}$ در Λ_2 که $y_n \to y_0$، می توان به راحتی از پیوستگی $r(y)$ به این نکته برسیم که $r_0 := \lim_{n\to\infty} r(y_n)$ یکتا بوده و مستقل از دنباله $\{y_n\}$ می باشد. بنابراین $r(y_0) = r_0$ را تعریف می کنیم. بنابراین، ما تابع درآمد $r(y)$ را به دامنهٔ $\overline{\Lambda}_2$ بسط می دهیم. به دلیل (5)، وقتی Λ_1 بسته باشد، و $\inf \Lambda_1 = \inf \overline{\Lambda}_2$ و $\Lambda_1 = \sup \overline{\Lambda}_2$. باشد، آنگاه مسئله زیر را با همان تابع هدف (6) اما با دامنه مبسوط $\overline{\Lambda}_2$ معرفی می کنیم:

$$\sup_{y \in \overline{\Lambda}_2} \{r(y) - y\lambda(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{7}$$

از تئوری واقعی (Zheng andWang,1980 را ببینید)، که $\overline{\Lambda}_2 = \bigcup_i [a_i, b_i]$ که بعضی از ثابت ها $0 \le a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 \cdots \le d^*$، که $d^* = \sup \Lambda_2$. می باشد. فرض کنید $c^* := \inf \Lambda$ کمترین نیاز مجاز باشد. اگر $c^* \in \Lambda$ باشد، آنگاه c^* یقینا نه یک نقطه خارجی است و نه یک نقطه محدب است یعنی $c^* \in \Lambda_2$ و $a_1 = c^*$ می باشد. مطمئنا $\overline{\Lambda}_2 \subset [c^*, d^*]$ و $c^*, d^* \in \overline{\Lambda}_2$.

به علاوه، ما تابع درآمد $r(y)$ را از دامنه $y \in \overline{\Lambda}_2$ به بازه بسته $y \in [c^*, d^*]$ بصورت زیر بسط می دهیم:

$$r^*(y) = \begin{cases} r(y) & a_i \le y \le b_i, \ i = 1, 2, \dots \\ \beta_i r(b_i) + (1-\beta_i) r(a_{i+1}) & b_i < y < a_{i+1}, \ i = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{8}$$

که $\beta_i = (a_{i+1} - y)/(a_{i+1} - b_i)$. این بسط، یکتا است.

با توجه به گزاره 1 و لم 3، گزاره زیر را خواهیم داشت.

گزاره 2. تابع درآمد $r^*(y)$ در $y \in [c^*, d^*]$، صعودی، پیوسته و مقعر است. تعریف تابع تقاضای منظم در Gallego و van Ryzin (1994) نیازی به صعودی بودن ندارد و بر اساس گزاره بالا،ما یک تابع درامد را منظم می نامیم اگر صعودی، پیوسته و نقعر باشد. آنگاه $r^*(y)$ منظم است. با توجه به تابع درآمد منظم، ما مسئله بیشینه سازی زیر را در نظر می گیریم:

$$\sup_{y \in [c^*, d^*]} \{r^*(y) - y\lambda(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{9}$$

برای هر $t \in \mathcal{T}$، تابع هدف بالا در بازه بسته $[c^*, d^*]$ مقعر و پیوسته است. بنابراین پاسخ های بهینه بصورت مجموعه ای بصورت بازه وجود دارد که با $Y^*(t)$ نشان داده می شوند. اکنون $Y^*(t)$ با حل شرط مرتبه اول (9) یعنی برای $t \in \mathcal{T}$، $(d/dy)r^*(y) = \lambda(t)$ به دست می آید.

در برخی موارد ما می توانیم در گزاره بالا $c^* = 0$ بگیریم.

تذکر 2. وقتی برای هر $t \in \mathcal{T}$، $y \in [c^*, d^*]$ وجود داشته باشد بطوری که $\overline{r^*(y) - y\lambda(t)} \geq 0$، می توانیم بدون تغییر بهینگی مسئله، صفر را به $\overline{\Lambda_2}$ اضافه کنیم. بنابراین می توانیم $c^* = 0$ گرفته و همانطور که در (8) انجام گرفت، $\overline{r^*(y)}$ به دامنهٔ $[0, d^*]$ بسط داده شود.

2.3 نتایج معادل

ما هم ارزی پاسخ های بهینه را بین مسائل (1)،(3)، (4) و (6) برقرار کرده ایم. اما چنین هم ارزی را به مسئله (7) یا (9) بسط نداده ایم. در مجموع ما قضیه زیر را داریم.

قضیه 1. (1) هر پاسخ بهینه مسئله (3)، (4) یا (6) برای مسائل (7) و (9) بهینه باقی می ماند.

(2) برای هر $t \in \mathcal{T}$، $Y^*(t) \cap \overline{\Lambda}_2$ یک مجموعه ناتهی از پاسخ ها برای مسئله (7) می باشد. به علاوه وقتی $Y^*(t) \cap \Lambda_2$ ناتهی است، هر یک از این عناصر برای مسائل (3) ف (4) و (6) بهینه است.

اثبات. (1) با توجه به بحث های قبلی بدیهی است.

(2) t، فرض کنید $\overline{B^*(y,t) = r^*(y) - y\lambda(t)}$. باشد. برای هر $y^0 \in [c^*, d^*] - \overline{\Lambda}_2$، باید $i \in \{1,2,\ldots\}$ وجود داشته باشد به گونه ای که $b_i < y^0 < a_{i+1}$. فرض کنید $\beta = (a_{i+1} - y^0)/(a_{i+1} - b_i)$. انگاه $y^0 = \beta b_i + (1-\beta) a_{i+1}$. با توجه به (8) و (9) داریم:

$$
\begin{aligned}
B^*(y^0, t) &= \beta r(b_i) + (1 \quad \beta) r(a_{i+1}) \quad y^0 \lambda(t) \\
&= \beta r(b_i) + (1 \quad \beta) r(a_{i+1}) \quad \beta b_i \lambda(t) \quad (1 \quad \beta) a_{i+1} \lambda(t) \\
&= \beta B^*(b_i, t) + (1 \quad \beta) B^*(a_{i+1}, t) \\
&\le \max\{B^*(b_i, t), B^*(a_{i+1}, t)\}
\end{aligned}
$$

که در آن باتوجه به $\beta \in (0,1)$ از نابرابری تبعیت می کند. نابرابری بالا به معادله تبدیل می شود اگر وتنها اگر $B^*(b_i, t) = B^*(a_{i+1}, t)$. از این رو هر دوی b_i و a_{i+1} بهینه هستند وقتی که y^0 بهینه باشد. این نشان می دهد که $Y^*(t) \cap \overline{\Lambda}_2$ ناتهی است. آنگاه نتیجه باقیمانده با توجه به (1) بدیهی است.

قضیه بالا به ما دو چیز را می گوید. یکی این که هر پاسخ بهینه مسئله اصلی (3) برای مسئله (9) بهینه باقی می ماند. بنابراین اگر پاسخ بهینه (3) را داشته باشیم، مسئله (9) می بایست پاسخ های بهینه ای داشته باشد. و دوم اینکه اگر $Y^*(t) \cap \Lambda_2$ تهی باشد، انگاه مسئله اصلی (3) هیچ پاسخ بهینه ای ندارد، به بیان دیگر هریک از پاسخ های $Y^*(t) \cap \Lambda_2$ برای مسائل (3)، (4)،(6)و (7) بهینه خواهد بود.

در ادامه، موردی را در نظر می گیریم که برای هر $t \in \mathcal{T}$، $\lambda(t) > 0$ است. نخست، برای این مورد اشاره می کنیم که لم 2، با همان اثبات می تواند اصلاح شود. برای هر $y_1, y_2 \in \Lambda$ که $y_1 < y_2$ و $r(y_1) \ge r(y_2)$، برای هر $t > 0$،

داریم: $B(y_1, t) > B(y_2, t)$. سپس نقاط نزولی مثل y_2 را مجددا تعریف می کنیم. بنابراین، پس از حذف همه نقاط نزولی، تابع درامد $r(y)$، در $y \in \Lambda_1$ و $y \in \Lambda_2$ و $y \in \Lambda_2$ اکیدا صعودی خواهد بود.

با این اصلاح، $r^*(y)$ در $[c^*, d^*]$ اکیدا صعودی، پیوسته و کران دار است. مسئله بیشینه سازی (9) پاسخ بهینه یکتایی دارد که برای هر $t \in \mathcal{T}$ با $y^*(t)$ نشان داده می شود. بنابراین نتیجه زیر را مستقیما از قضیه 1 خواهیم داشت.

نتیجه 1 . فرض کنید برای هر $t \in \mathcal{T}$، داشته باشیم $\lambda(t) > 0$. آنگاه برای هر $t \in \mathcal{T}$ پاسخ یکتای $y^*(t)$ برای مسئله بیشینه سازی (9)، وجود دارد. همچنین $y^*(t)$، پاسخ بهینه یکتا مسئله بیشینه سازی (3) است اگر و تنها اگر $y^*(t) \in \Lambda_2$.

اگر مسئله بیشینه سازی اصلی، (1) بوده و پاسخ های بهینه ای داشته باشد، مثلا وقتی $d(x)$ در مجموعه بسته P پیوسته باشد انگاه ما نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه 2. فرض کنید برای هر $t \in \mathcal{T}$ ، $\lambda(t) > 0$ باشد و مسئله (1) پاسخ های بهینه داشته باشد. آنگاه برای هر $t \in \mathcal{T}$ ، $p(y^*(t))$ پاسخ بهینه مسئله بیشینه سازی (1) است اگر و تنها اگر $y^*(t)$ پاسخ بهینه مسئله بیشینه سازی (9) باشد.

لازم به ذکر است که در گام های بالا، درآمد $r^*(y)$ و بازه $[c^*, d^*]$ مستقل از t هستند.

2.4. الگوریتم ها

در این بخش، الگوریتمی برای محاسبه Λ1 وΛ2 ارائه می شود در حالی که r(y) به طور پیوسته دو بار قابل مشتق گیری است. در این مورد محاسبه Λ1 و Λ2 ساده تر می شود. ابتدا فرض کنید r(y) در یک مجموعه بسته Λ به طور پیوسته مشتق پذیر است. سپسΛ1 را می توان با یک روش ساده تر به شرح زیر به دست آورد.

در این مورد$r'(y)$ در $y \in \Lambda$ پیوسته است و به همین ترتیب $r(y)$ در برخی از بازه های زمانی صعودی و در بازه های زمانی دیگر نزولی است. بنابراین می توان تمام فواصلی که در آن $r(y)$ نزولی است را حذف کرد. بخش باقی مانده از Λ متشکل از بازه های زمانی ای است که در آن $r(y)$ صعودی است. $[a'_1, b'_1]$ را اولین بازه در این فواصل در نظر بگیرید. (توجه داشته باشید که اگر $r(y)$ در c^* نزولی باشد آنگاه $a'_1 = b'_1 = c^*$). سپس برای همه نقاط $a > b'_1$ به طور رضایت بخشی $r(a) < r(b'_1)$ بیشتر باید حذف شود. اگر بخش باقی مانده Λ غیرتهی است، $[a'_2, b'_2]$ بازه اول در نظر گرفته می شود. دوباره برای تمام نقاط $a > b'_2$ به طور رضایت بخشی $r(a) < r(b'_2)$ باید حذف شود و به همین ترتیب جلو می رویم. در نهایت $\Lambda_1 = [a'_1, b'_1] \cup [a'_2, b'_2] \cup \cdots$ اجتماع فواصل متناهی یا نامتناهی ممکن را داریم. از آنجا که در بالا تقاضا اغلب محدود شده است، برای راحتی فرض می کنیم $\Lambda_1 = [a'_1, b'_1] \cup [a'_2, b'_2] \cup \cdots \cup [a'_n, b'_n]$ با فواصل متناهی. با این حال مجموعه های نامتناهی را نیز می توان به طور مشابه مورد مطالعه قرار داد و نتایج هنوز در زیر صادق می باشد. فرض کنید که $r(y)$ به طور پیوسته بیشتر از دو بار در $y \in \Lambda_1$ مشتق پذیر باشد. در این مورد $r''(y)$ پیوسته است بنابراین $r'(y)$ در بسیاری از بازه ها نزولی است (یا به طور هم ارز $r(y)$ مقعر است) و در دیگر بازه ها صعودی است (یا $r(y)$ محدب است). به طور مشابهی برای Λ_1، در هر جایی که $r'(y)$ نزولی باشد

Λ'_2 را زیر مجموعه Λ_1 در نظر می گیریم به عنوان مثال $\Lambda'_2 := \{y \in \Lambda_1 | r'(y)$ در y نزولی است.$\} = [a''_1, b''_1] \cup [a''_2, b''_2] \cup \cdots \cup [a''_n, b''_n]$. سپس $r(y)$ در هر بازه $[a''_i, b''_i]$ صعودی مقعر است اما الزاما در Λ'_2 مقعر نیست.

واضح است که $r^*(y)$ در Λ'_2 مقعر است اگر و تنها اگر

$$r''(y) \leq 0, \quad y \in \left[a''_i, b''_i\right]; \quad r'\left(b''_i\right) \geq \frac{r(a''_{i+1})-r(b''_i)}{a''_{i+1}-b''_i} \geq r'\left(a''_{i+1}\right) \quad \forall i-1,2,\ldots,n. \tag{10}$$

از آنجا که r(y) در هر بازه ای در A'_2 مقعر است، الگوریتم زیر را خواهیم داشت.

الگوریتم 1. A_2 را از $A'_2 = [a''_1, b''_1] \cup [a''_2, b''_2] \cup \cdots \cup \quad [\bar{a''_n}, b''_n]$ برای $n \geq 2$ محاسبه کنید که r(y) به طور پیوسته دو بار قابل مشتق گیری است.

مرحله0 . i=1 قرار دهید.

مرحله 1 . $\delta = (r(a''_{i+1}) \quad r(b''_i))/(a''_{i+1} \quad b''_i)$ را در نظر بگیرید.

مرحله 2 . اگر در مرحله 1 شرط $r'(b''_i) < \delta$ برقرار بود آنگاه $(r(a''_{i+1}) \quad r(y)) \;/(a''_{i+1} \quad y) = r'(y)$ را در بازه $[a''_i, b''_i)$ حل کنید. اگر جواب y^*_i معادله در بازه $[a''_i, b''_i)$ وجود داشته باشد آنگاه $b''_i = y^*_i$ قرار می دهیم به عبارت دیگر اگر i=1 آنگاه $b''_i = y^*_i$ قرار می دهیم سپس $[a''_i, b''_i]$ را از A'_2 حذف می کنیم و زمانی که i=n شد متوقف می شویم. I=i+1 قرار داده و به مرحله 1 باز می گردیم.

واضح است زمانی که الگوریتم 1 متوقف شود A_2 را در نظر می گیریم.

اظهارات زیر در رابطه با تقعر r(y) ارائه می شود.

تذکر 3 . (1) پیچیدگی الگوریتم 1 به طور عمده به حل دو معادله در مرحله 2 بستگی دارد. اگر روش های تحلیلی برای حل این دو معادله وجود ندارد، باید آن ها را به صورت عددی حل کرد. با این حال یک بار $r^*(y)$ بدست آمده است، ماکزیمم $r^*(y) \quad y\lambda(t)$ می تواند برای همه $t \in \mathcal{T}$. حل شود. از این رو این الگوریتم دارای محاسنی بیش از محاسبات عددی است در صورتی که مجموعه پارامتر های $\mathcal{T}$ بزرگ به عنوان مثال، یک بازه باشد. از سوی دیگر انجام الگوریتم 1 در بسیاری از موارد آسان است همانطور که در مثال های مورد بحث در بخش .3.3 انجام شد.

(2) ممکن است لزومی به محاسبه $\overline{\Lambda_2}$ و $r^*(y)$ نباشد. در حقیقت می توان هر زمان که جواب بهینه مسائل (3)، (4)، (6)، (7) و(9) یا

$$\sup_{y \in \Lambda_2} \{r(y) \quad y\lambda(t)\}, \quad t \in \mathcal{T}. \qquad (11)$$

بدست آمد، مراحل را متوقف کرد. اگر بتوان برای هر مسئله ای در بالا جواب بهینه ای پیدا کرد، جهت حل مسئله 9 نیازی به محاسبات طولانی Λ_2 نیست. در نهایت اظهارات زیر در رابطه با مجموعه متناهی قیمت p ارائه می شود.

تذکر 4 . فرض کنید مجموعه قیمت p نامتناهی است. به طور معمول بیشتر در مطبوعات گالگو و ون رایزین فرض می شود که $\lim_{x\to\infty} xd(x) = 0$. سپس $\lim_{x\to\infty} d(x) = 0$ بنابراین $c^* = \inf \Lambda = 0$.سپس. تعریف می کنیم

$$r(0) := \lim_{y\to 0} r(y) = \lim_{x\to\infty} xd(x) = 0.$$

علاوه بر این تا زمانی که $x > \lambda(t)$ پاسخ مسئله 1 مثبت است. در حالی که پاسخ مسئله 3 در برخی از y ها مثبت است. بنابراین y=0 برای مسئله 3 بهینه نخواهد بود و می توان فرض کرد که در مسئله (3) $0 \in \Lambda$. بنابراین همه نتایج در این بخش درست هستند.

2.5 . کنترل ورودی های بهینه در سیستم های صف بندی

به عنوان مثال برای نشان دادن مسائل و نتایج مورد بحث در بخش قبلی، در یک سیستم M/M/K کنترل ورودی های بهینه را از نو مورد بررسی قرار دادیم که قبلا در لیپمن (1975) مطالعه شده بود. این مسئله در مطبوعات ضیاء و همکارانش مورد بحث نبود. در اینجا، (1) مشتریان با توجه به فرایند پواسون با نرخ λ که از یک مجموعه فشرده غیر تهی $\Lambda \subset [0, \overline{\lambda}]$ با $\overline{\lambda}$ که یک ثابت مثبت و محدود می باشد، انتخاب شده است،

موفق می شوند. (2) هر یک از سرورهای K در خدمت مشتریان با زمان توزیع نمایی با نرخ μ هستند. تمامی زمان ها خدمات با یکدیگر و نیز با روند ورود مستقل هستند.

برقراری نرخ قیمت h(i) زمانی که طول صف i باشد (به عنوان مثال ، i مشتریان در سیستم) نامنفی، افزاینده و محدب است. از سوی دیگر زمانی که $\lambda \in \Lambda$ انتخاب شود، سیستم متحمل نرخ پاداش نامنفی $q(\lambda)$ است.

$V_{\alpha}^{a}(i)$ را

قیمت مینیمم کاهش یافته در یک افق بی نهایت با یک عامل کاهنده $\alpha > 0$ در نظر بگیرید. سپس با استفاده از دستگاه لیپمن، $V_{\alpha}^{a}(i)$ در معادله بهینه به شرح زیر است:

$$V_{\alpha}^{a}(i) = \frac{1}{\Delta+\alpha}\{h(i)+\mu(i \wedge K)V_{\alpha}^{a}(i-1)+[\Delta-\mu(i \wedge K)]V_{\alpha}^{a}(i)\}$$
$$+\frac{1}{\Delta+\alpha}\min_{\lambda\in\Lambda} g_{\alpha}^{a}(i,\lambda), \quad i \geq 0, \qquad (12)$$

جایی که

$\lambda_{\alpha}(i)$, $\Delta = \bar{\lambda}+\mu K$, $g_{\alpha}^{a}(i,\lambda) = \lambda q(\lambda)+\lambda v_{\alpha}^{a}(i+1)$ and $v_{\alpha}^{a}(i+1) = V_{\alpha}^{a}(i+1) \ V_{\alpha}^{a}(i)$.

$q(\lambda)$ را به عنوان بزرگترین کوچک شمار معادله بهینگی بالا تعریف کنید. لیپمن (1975) نشان داد که اگر پیوسته یا نزولی باشد و از راست پیوسته باشد، $V_{\alpha}^{a}(i)$ در i مقعر است بنابراین $\lambda_{\alpha}(i)$ در i نزولی است. در مطبوعات لیپمن پیوستگی از راست $q(\lambda)$ وجود $\lambda_{\alpha}(i)$ و نزولی بودن $q(\lambda)$ یکنواختی $\lambda_{\alpha}(i)$ را تضمین می کند.

هر چند زمانی که $q(\lambda)$ پیوسته باشد، وجود و یکنواختی $\lambda_{\alpha}(i)$ تضمین شده است. علاوه بر این نگرانی مبنی بر اینکه در این مطبوعات $\lambda_{\alpha}(i)$ چطور محاسبه می شود، وجود ندارد.

زمانی که $\lambda g_{\alpha}(i,\lambda)$ مسئله کمینه کردن مینیمم $\min_{\lambda} g_{\alpha}^{a}(i,\lambda) = \max_{\lambda}\{\lambda q(\lambda) \quad \lambda v_{\alpha}^{a}(i+1)\}$ در (12) می تواند با مسئله (3) متناسب شود. در هر تابع $q(\lambda)$ ارائه شده، $\Lambda 1$ را زیر مجموعه ای از Λ متشکل از نقاط غیرکاهنده $\lambda q(\lambda)$ و $\Lambda 2$ را زیر مجموعه ای از $\Lambda 1$ متشکل از نقاط مقعر $\lambda q(\lambda)$ قرار دهید. از آنجایی که Λ فشرده است، با توجه به قضیه 1 :

$$\min_{\lambda \in \Lambda} g_{\alpha}^{a}(i,\lambda) = \min_{\lambda \in \Lambda_1} g_{\alpha}^{a}(i,\lambda) = \min_{\lambda \in \Lambda_2} g_{\alpha}^{a}(i,\lambda), \quad i \geq 1. \tag{13}$$

بنابراین گزاره های زیر با توجه به گزاره 1 و قضیه 1 روشن هستند.

گزاره 3 . $V_{\alpha}^{a}(i)$ در i محدب است، $\lambda_{\alpha}(i)$ جواب $(\lambda q(\lambda))' = v_{\alpha}^{a}(i+1)$ در Λ_2 و در i نزولی است.