# سیستم های صف بندی زمان گسسته با تعطیلی های انحصاری مارکوفی


## چکیده

در این مشارکت ما سیستم های صف بندی زمان گسسته را به همراه تعطیلی ها بررسی می کنیم. چارچوبی ساخته شده که امکان مطالعه سیستم های تعطیلی مختلف متعددی را فراهم می کند، شامل سیسستم های تعطیلی کلاسیک .a.o نظیر سیستم های تعطیلی جامع و محدود و همچنین سیستم های صف بندی با وقفه های (انقطاع) خدمات. با استفاده از مشی تابع تولید احتمال، ما به مقیاس های عملکرد حالت ثابتی دست یافته ایم، نظیر اهمیت محتوای صف در سرآغازهای مختلف و با تأخیر مشتری. پی از آن سودمندی مدل های تعطیلی در ترافیک مخابراتی با استفاده از چند برنامه عملی تر شرح داده شده است (صف بندی اولویت، CSMA/CD).


## 1-مقدمه

اثبات شده که سیستم های صف بندی با تعطیلی در مدلسازی عدم قابلیت اطمینان سرورها انتزاع مفیدی هستند و در سیستم های مدلسازی که در آنها منابع خدمات بین چندین رده از مشتریان اشتراکی است سودمندند. نمونه های معمول رده برنامه های قبلی شامل مدل های تعمیر/نگهداری و سیستم های ARQ می باشد. مدل های صف بندی اولویت، و مدل های نمونه برداری مثال هایی از رده دوم هستند.

در این مشارکت، ما صف $\mathrm{Geo}^X/G/1$ زمان گسسته مربوط به تعطیلی ها را در نظر می گیریم. فرایند تعطیلی مارکوفی است و علاوه بر این ممکن است وابسته به حالت سیستم باشد: احتمال رها کردن یک تعطیلی در انتهای یک شکاف و طول مدت این تعطیلی بسته به این است که آیا مشتری در عرض شکاف خدماتی دریافت می کند یا خیر، و اگر اینگونه است، آیا خدمت رسانی به این مشتری ادامه می یابد یا نه، و بعد از یک سیستم خالی به رها کردن خدمات خاتمه می دهد، یا خدمات را خاتمه می دهد اما پس از یک سیستم غیر خالی. اینگونه، تعطیلی ها می توانند خدمات مشتری را دچار وقفه کنند؛ گاهی اوقات به چنین

تعطیلاتی با عنوان انحصاری نام برده شده ک که مطابق با واژه شناسی سیستم های صف بندی اولویت است. بنابراین ما حالات مختلف عملکرد  را در نظر می گیریم تا از عهده این وقفه ها (اختلالات) بر آییم: مشتری پس از وقفه به دریافت خدمات خود باز می گردد، خدمات خود را تکرار می کند یا مشتری خدمات خود  را با زمان خدمت رسانی تکرار می کنند که احتمالاً متفاوت از زمان خدمت رسانی اولیه است.

مدل تحت نظر می تواند رفتار تعدادی از مدل های تعطیلی کلاسیک را ثبت و ضبط نماید – شامل سیستم تعطیلی جامع با تعطیلی های منفرد و چندتایی و سیستم های تعطیلی محدود به تعداد و زمان – و همچنین سیستم های همراه با فرایند تعطیلی مستقل انحصاری. مدل های تعطیلی کلاسیک به طرز گسترده ای در مونوگراف های عالی Takagi در تئوری صف بندی زمان پیوسته و زمان گسسته اصلاح شده اند. نتایج جدیدتر نیز توسط Tian و Zhang خلاصه شده اند. سیستم هایی که با فرایند تعطیلی مستقل انحصاری همراهند در اینجا مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته اند. از چنین سیستم هایی در اغلب موارد با عنوان سیستم های همراه با وقفه های سرور یا از کار افتادگی سرور نام برده شده است. دسترس پذیری سرور از این پس می تواند با تغییر دسترس پذیری سرور بین روشن بودن و خاموش بودن به عنوان فرایند  خاموش – روشن مدلسازی شود.

ما ابتدا روی مدل های زمان پیوسته تمرکز می کنیم. طبق اظهارات Ibe و Trivedi، White و Christie اولین کسانی بودند که صف های  دارای وقفه را بررسی و مطالعه کردند. آنi سیستم صف بندی M/M/1 زمان پیوسته را در نظر گرفتند که در آن فرایند تعطیلی به عنوان فرایند روشن – خاموشی مدلسازی شده که با دوره های روشن و خاموش دارای توزیع نمایی همراه است. زمان های خدمات توزیع شده و دوره های خاموش توسط Avi-Itzhak و Naor و همچنین Thiruvengadam بررسی شده اند. این نویسندگان دوره های روشن دارای توزیع نمایی را به بر خلاف Federgruen و Green در نظر می گیرند، که دوره های روشن نوع فاز را در نظر گرفته اند. Van Dijk تحلیل تخمینی از سیستمی با زمان های خدمات دارای توزیع نمایی ارائه می کند اما با دوره های روشن و خاموش دارای توزیع عمومی در حالی که Takine و Sengupta سیستم صف بندی تعطیلی را در محیط ماژوله شده مارکوف مطالعه کرده اند.

نویسندگان دوم نیز امکان همبستگی در فرایند ورود را فراهم می کنند. صف هایی که دارای وقفه هستند نیز خارج از چارچوب صفه های تک سروری اول آمده اول خدمات می گیرد مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته اند. Ke و همکارانش سیستم صف بندی چند روری مارکوفی را با وقفه های سرور در نظر می گیرند، و نشان می دهند که فرایند صف بندی می تواند با فرایند شبیه تولد – مرگ (QBD) تعریف شود و از نظر عددی با فرایند QBD حل شود. Choudhury و Ke عملکرد صف آزمایش مجدد همراه با وقفه ها را با استفاده از مشی pgf ارزیابی می کنند. به علاوه، سیستم صف بندی اشتراک پردازشگر با دوره های روشن دارای توزیع نمایی و دوره های تعطیلی دارای توزیع عمومی توسط Nunez Queija مورد مطالعه قرار گرفته است. در تمام این مشارکت ها فرض بر این است که مشتریان پس از وقفه دوباره سرویس رسانی می شوند. .Gaver Jt نیز موردی را در نظر می گیرد که در آن خدمات یا تکرای هستند یا تکراری هستند و پس از وقفه دوباره نمونه گیری شده اند. حالت عملیاتی دوم نیز توسط Ibe و Trivedi برای سیستم نمونه گیری دو جایگاهی مورد مطالعه قرار گرفته و Krishnamoorthy و همکارانش این حالت را برای فرایند ورود مارکوف و زمان های خدمات نوع فاز بررسی کرده اند.

تحقیق در مورد سیستم های صف بندی زمان گسسته با وقفه های خدمات بعد از این شروع شد. مشارکت های اخیر شامل همکاری های Hsuو Heines است. هر دو نویسنده سیستم سرور منفرد را با تعطیلی های سرور برنولی و فرایند ورود پواسون اصلاح می کنند. نویسنده اول محتوای صف را در مرزهای شکاف تصادفی در نظر می گیرد در حالیکه نویسنده دوم محتوای صف را در زمان تکمیل خدمات در نظر می گیرد. یک سیستم سرور منفرد با فرایند ورود مستقل و فرایند تعطیلی سرور روشن/خاموش همبسته توسط Bruneel، Yang و Mark و Woodside و Ho اصلاح شده است. Yang و Mark و Woodside و Ho دوره های روشن و خاموش را به عنوان دو سری متغیر تصادفی هندسی تغییر یافته مستقل مدلسازی می کنند در حالیکه Bruneel فرض را بر این می گذارد که سری دوره های روشن بعدی و همچنین سری دوره های خاموش متعاقبا آن توزیع عمومی مشترکی را به اشتراک بگذارند. تنها محدودیت در مشارکت دوم

این است که تابع تولید احتمال مشترک از دوره های روشن باید منطقی باشد. در عو، همبستگی در فرایند تعطیلی با استفاده از فرایند مارکوفی توسط Lee ثبت و ضبط شده است.

Georganas و Bruneel سیستم های چندسروری را با ورودی مشتری مستقل و فرایندهای تعطیلی سرور اصلاح کرده اند. مورد دوم مورد اول را از آن نظر بسطر می دهد که فرض را بر این نمی گذارد که تمام سرورها یا در دسترسند یا بطور همزمان در حالت استراحت هستند. تحلیل تأخیر سیستم دوم توسط Laevens و Bruneel ارائه شده است. Bruneel سیتمی چندسروری را با فرایند تعطیلی مرتبط در نظر می گیرد. در اینجا، فرایند تعطیلی به عنوان فرایند روشن / خاموش (دوره های روشن هندسی) مدلسازی شده است. تعداد سررورهای موجود در دعرض شکاف های روشن متوالی شامل یک سری متغیر تصادفی مستقل و توزیع شده غیر منفی است در حالی که هیچ سروری در عرض دوره های خاموش در دسترس نیست.

برخی از مشارکت ها نیز امکان میزان معینی از همبستگی را در فرایند ورود داده اند. Bruneel فرض می کند که هم فرایند ورود و هم فرایند تعطیلی فرایند های روشن / خاموش با دوره های خاموش و روشن هندسی هستند. تعدادی تصادفی از مشتریان در عرض دوره های ورود – روشن وارد می شوند، در حالی که هیچ مشتری در عرض دوره های خام رسیدن – خاموش وارد سیستم نمی شود. فرایند تعطیلی مشابه با موردی است که توسط Yang و Mark در مورد ورودهای غیر همبسته تحلیل شده است. این فرایند تعطیلی توسط Ali و همکارانش و Kamoun بررسی شده است. اما این نویسندگان فرض می کنند که ورود مشتریان از موقعیت فوق العاده از منابع دو حالتی مارکوفی روشن و خاموش یا از فرایند سلسله ورود می آید.

تمام مدل های صف بندی زمان گسسته قبلی زمان های خدمات مستری یک شکاف منفرد را ثابت کرده اند. سیستم های صف بندی که در آنها مشتریان چندین شکاف را ثابت کرده اند و زمان های خدمات توزیع شده عمومی به ترتیب توسط Inghelbrecht و همکارانش و Fiems و همکارانس بررسی شده اند. فرایند

تعطیلی یا یک فرایند مارکوفی دو حالتی است یا یک فرایند تجدید. تلفیق زمان های خدمات چند شکافی و تعطیلی ها اشاره به این دارند که ممکن است خدمات یک مشتری دچار وقفه شود. خدمات می توانند ادامه یابند یا خدمات را با همان زمان سرویس یا با زمان سرویس متفاوتی پس از وقفه تکرار کنند. علاوه بر این خدمات می تواند بصورت جزئی تکرار شود یا پی از وقفه به تعویق بیافتد. در مورد دوم، سرویس در عرض تعطیلی ها ادامه می یابد اما تا زمانی که مشتری خدمات را بدوت تعطیلی دریافت کند تکرار شده است. در نهایت، چون وقفه ها و تکرار سرویس ها سیستم های صف بندی را ارائه می نمایند، Morozov و Fiems ثبات سیستم صف بندی زمان گسسته را با وقفه های سرور و نمونه گیری مجدد پس از وقفه تحت تنظیمات کلی تر توزیع عمومی زمان های روشن، خاموش و وقفه های ورودی بررسی می کنند.

طرح کلی بقیه این مشارکت به شرح زیر است. در بخش بعدی، مدل تحت بررسی با ذکر جزئیات شرح داده شده است. پس از آن در بخش 5-3 تحلیل ارائه شده است. در بخش 3، ما شرح هایی برای توابع تولید احتمال زمان های خدمات موثر مشتریان استنباط کرده ایم. شی زمان سرویس موثر به ما این امکان را می دهد تا تحلیل صف بندی بکپارچه ای برای تمام حالات تحت بررسی ارائه نماییم. تابع تولید احتمال محتوای صف و تأخیر مشتری به ترتیب در بخش های 4 و 5 ارائه شده اند. در بخش 6 ما مدل خود را به چند مدل تعطیلی موجود مرتبط کرده ایم، در حالی که چند کاربرد ترافیک مخابراتی در بخش 7 ارائه شده است. در نهایت در بخش 8 نتیجه گیری شده است.

## 2- مدل ریاضیاتی

ما سیستم صف بندی زمان گسسته ای در نظر می گیریم، یعنی، زمان به وقفه هایی با طول ثابت با شکاف ها تقسیم شده است. در عرض شکاف های متوالی، مشتریان وارد سیستم می شوند، و در بافر با ظرفیت نامتناهی ذخیره می شوند و به آن ها بر مبنای اول آمده اول خدمات دریافت می کند سرویس داده می شود. شماره های مشتریانی که در عرض شکاف های متوالی رسیده اند به عنوان یک سری متغیرهای مستقل و توزیع شده بصورت یکسان (i.i.d) و غیر منفی با تابع توده احتمال مشترک

$(pmf)\, e(n)\ (n \geq 0)$ مدلسازی شده اند. می توان و تابع تولید احتمال مشترک متناظر .. $(pgf)\, E(z)$ به سادگی تأیید کرد که این فرایند ورود مطابق با فرایند رسیدن دسته ای با زمان های میان ورود توزیع شده هندسی است.

خدمات مشتریات در کران های شکاف متقارن سازی شده اند، و این نشان دهنده این است که مشتری نمی تواند خدمات را قبل از پایان شکاف ورود آن شروع کند. به علاوه، زمان های خدمات – شرح داده شده به عنوان عدد صحیح شکاف ها – ازمشتریان متوالی به عنوان یک سری متغیر تصادفی مثبت i.i.d با $pmf\, s(n)\ (n > 0)$ و $pgf\, S(z)$ مدلسازی شده اند. به علاوه، ما فرض را بر این می گذاریم که زمان خدمات مشتری بواسطه مقدار بیشینه $S_{max}$ محدود شده است. فرضیه دوم هر جا ممکن باشد تخفیفی خواهد یافت.

ما یک سیستم سرور منفرد را در نظر می گیریم. اما، سرور همیشه در دسترس نیست. در عرض هر شکاف که در آن سرور در دسترس است، فرایند تعطیلی در یکی از N حالت ممکن است، یعنی حالت 1 تا N. فرایند تعطیلی پس از آن با احتمالات زیر تخصیص یافته است.

با توجه به اینکه فرایند تعطیلی در شکاف A خاصی در حالت i است و با توجه به اینکه به مشتری خدمت رسانی می شود و خدمات را در عرض این شکاف خاتمه نمی دهد، سرور تعطیلی به میزان $n\ (n \geq 0)$ شکاف می گیرد و فرایند تعطیلی پس از این تعطیلی با احتمال $b_{ij}^{a}(n)$ به حالت j می رود.

مشابهاً، با توجه به اینکه فرایند تعطیلی در شکاف A خاصی در حالت i است و با توجه به اینکه به مشتری در این شکاف خدمت رسانی می شود و اینکه سیستم پس از حرکت این مشتری غیر خالی است، سرور تعطیلی به میزان $n\ (n \geq 0)$ شکاف می گیرد و فرایند تعطیلی پس از این تعطیلی با احتمال $b_{ij}^{a}(n)$ به حالت j می رود.

علاوه بر این، با توجه به اینکه فرایند تعطیلی در شکاف A خاصی در حالت i است و با توجه به اینکه مشتری خدمات را در این شکاف خاتمه می دهدو با توجه به اینکه سیستم پس از حرکت این مشتری خالی است، سرور تعطیلی به میزان $n\ (n \geq 0)$ شکاف می گیرد و فرایند تعطیلی پس از این تعطیلی با احتمال $b_{ij}^{a}(n)$ به حالت j می رود.

در نهایت، با توجه به اینکه فرایند تعطیلی در شکاف A خاصی در حالت i است و با توجه به اینکه هیچ مشتری در آغاز این شکاف در سیستم قرار دارد، سرور به میزان $n\ (n \geq 0)$ شکاف تعطیلی می گیرد و فرایند تعطیلی پس از این تعطیلی با احتمال $b_{ij}^{a}(n)$ به حالت j می رود.

برای راحتی و ارجاع بیشتر، معنای بالانویس های a تا d بالا نیز در جدول 1 خلاصه شده اند. می توان اشاره کرد که دوره های تعطیلی با طول صفر مجازند. در آن مورد، سرور در عرض شکاف بعدی در دسترس است.

برای استفاده بیشتر، ما توابع تولید احتمال جزئی $B_{ij}^{k}(z)$ را طبق احتمالات $b_{ij}^{k}(n)$ برای $k \in \{a, \ldots, d\},$ تعریف می کنیم،

$$B_{ij}^{k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{ij}^{k}(n)\, z^{n}, \quad |z| < 1 \tag{1}$$

که ما آن را در ماتریس های $N \times N$ جمع آوری می کنیم.

$$\mathbf{B}^{k}(z) = \left[B_{ij}^{k}(z)\right]_{i,j=1\ldots N} \tag{2}$$

چون احتمالات $b_{ij}^{k}(n)\ (n \geq 0)$ کاملاً بواسطه توابع تولید احتمال متناظر اختصاص یافته اند، فرایند وقفه نیز با ماتریس های $N \times N$، $\mathbf{B}^{k}(z),\ k \in \{a, \ldots, d\}.$ توصیف شده اند.

واضح است که وجود زمان های سرویس چند شکافی و تعطیلی ها اشاره به این دارند که تعطیلی می تواند در حینی که یک مشتری خدمات دریافت می کند شروع شود. در ادامه پس از حالت وقفه (CAI)، مشتری خدمات را پس از تعطیلی ادامه می یابد، در تکرار پس از حالت وقفه (RAI)، مشتری باید تمام کارها را

شروع کند. این موردی است که برای تکرار پس از حالت وقفه با نمونه گیری مجدد (RAI,wr) وجود دارد. اما، در مورد دوم، زمان های خدمات پس از هر وقفه نمونه گیری مجدد شده اند.

## 3- زمان های خدمات موثر

اجازه دهید زمان خدمات مشتری اشاره به تعداد شکاف هایی داشته باشد که به طرز کارامد برای خدمت رسانی به یک مشتری خاص صرف می شود. زمان سرویس موثر یک مشتری به عنوان تعدا شکاف های میان آغاز شکافی که در آن مشتری برای اولین بار خدمات دریافت می کند و پایان شکافی که در آن مشتری سیستم را ترک می کند تعریف شده است. بنابراین زمان های سرویس کارامد شامل زمان تعطیلی محتمل (وقفه های خدمات) می باشد و در مورد RAI یا حالت RAI، wr نیز شکاف های خدمات را از دست می دهد. توجه داشته باشید که تعریف قبلی اشاره به این دارد که سرور همیشه در عرض اولین و آخرین شکاف زمان خدمات کارامد مشتری در دسترس است.

### 3-1- ادامه دادن پس از وقفه

ما ابتدا عملیات CAI را در نظر می گیریم. اجازه دهید $t_{ij}(n|k)$ اشاره به احتمالی داشته باشد که زمان خدمات موثر یک مشتری n شکاف می گیرد و اینکه سرور در عرض آخرین شکاف زمان سرویس موثر در حالت j است، با توجه به اینکه سرور در دسترس است و فرایند تعطیلی در عرض اولین شکاف زمان سرویس موثر در حالت i است، و با توجه به اینکه این مشتری به k شکاف سرویس نیاز دار. برای کاربرد بیشتر، ما $t_{ij}(n)$ را به عنوان همان احتمال بدون شرطی سازی زمان سرویس تعریف می کنیم.

ما با شرط گذاری روی طول تعطیلی که پس از اولین شکاف زمان سرویس کارمد و در حالت فرایند تعطیلی پس از این تعطیلی در نظر گرفته شده، برای مقادیر $1 < k \leq S_{\max}$ و $i, j \in \{1 \ldots N\}$,، به فرمول زیر می رسیم:

$$t_{ij}(n|k) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=0}^{n-k} t_{lj}(n-m-1|k-1)\, b_{il}^{a}(m), \tag{3}$$

برای $n \geq k$ در حالی که احتمال قبلی برای $n < k.$ معادل با صفر است. معادله قبلی صادق است، از از نظر مزیت سرور، چون هیچ تفاوتی میان خدمت رسانی در زمان باقیمانده سرویس یک مشتری و خدمت رسانی به یک مشتری جدید با زمان سرویس معادل با زمان سرویس باقیمانده وجود ندارد.

اجازه دهید $T_{ij}(z|k)$ اشاره به pgf شرطی زئی متناظر با احتمالات پیشین داشته باشد، بنابراین چند دستکاری تبدیل z استاندارد برای مقادیر $i, j \in \{1 \ldots N\}$ و $1 < k \leq S_{\max}$حاصل می شوند،

$$T_{ij}(z|k) \triangleq \sum_{n=k}^{\infty} t_{ij}(n|k)\, z^n = z \sum_{l=1}^{N} T_{lj}(z|k-1)\, B_{il}^{a}(z), \tag{4}$$

اگر مشتری تنها به یک شکاف منفرد از خدمات نیاز داشته باشد، بنابراین زمان سرویس موثر آن معادل با یک شکاف است. بنابراین، ما احتمالات زیر را داریم:

برای تمامی مقادیر n و $i, j \in \{1 \ldots N\}$. داریم $t_{ij}(n|1) = \delta_{i-j}\, \delta_{n-1}$.

معادل pgf متناظر آن برای مقادیر $i, j \in \{1 \ldots N\}$. برابر $T_{ij}(z|1) = z\, \delta_{i-j}$ است. در اینجا، $\delta_n$ اشاره به تابع دلتای Kronecker دارد، یعنی $\delta_n$ برای n=0 معادل با 1 است و در غیر اینصورت برابر با صفر است. توجه داشته باشید که در این مورد خاص، اولین و آخرین شکاف زمان سرویس کارامد مشابهند.

برای سادگی نوشتاری، اجازه دهید $\mathbf{T}(z|k)$ اشاره به ماتریس $N \times N$ با عناصر $T_{ij}(z|k)$ دارد، بنابراین معادله (4) برای مقادیر k>1 و دیگر مقادیر $\mathbf{T}(z|1) = z\, \mathbf{I}_N$ فرمول زیر را حاصل می کند،

$$\mathbf{T}(z|k) = z\, \mathbf{B}^{a}(z)\, \mathbf{T}(z|k-1), \tag{5}$$

در اینجا $\mathrm{I}_N$ اشاره به ماتریس واحد $N \times N$ دارد. با تلفیق با فرمول قبلی، فرمول زیر را داریم

$$\mathbf{T}(z|k) = z\, \left(z\, \mathbf{B}^{a}(z)\right)^{k-1}. \tag{6}$$

با جمع تمام زمان های سرویس ممکن با توجه به توزیع زمان سرویس ماتریس $\mathbf{T}(z)$، زمان سرویس موثر زیر را حاصل می کند

$$\mathbf{T}(z) \triangleq \left[ \sum_{n=1}^{\infty} t_{ij}(n)\, z^n \right]_{i,j=1...N} = z \sum_{k=1}^{S_{\max}} s(k) \; \left( z\, \mathbf{B}^a(z) \right)^{k-1}. \quad (7)$$

ماتریس $\mathbf{T}(z)$، در بخش های 4 و 5 مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

## 2-3- تکرار پس از وقفه با نمونه گیری مجدد

برای wr،RAI ما ادامه می دهیم. اجازه دهید $t_{ij}(n|k)$ اشاره به احتمال این داشته باشد که زمان سرویس موثر یک مشتری معادل با n شکاف است و اینکه سرور در دسترس است و فرایند تعطیلی در عرض آخرین شکاف این زمان سرویس موثر در حالت j است، با توجه به اینکه مشتری به k شکاف سرویس نیاز دارد و اینکه سرور در دسترس است و فرایند تعطلی در عرض اولین شکاف زمان سرویس موثر در حالت i است. مشابهاً، اجازه دهید $t_{ij}(n)$ اشاره به احتمال قبلی بدون شرطی سازی زمان خدمات مشتری داشته باشد.

ما با شرط گذاشتن روی طول تعطیلی پس از اولین شکاف سرویس موقر و حالت فرایند تعطیلی پس از این تعطیلی برای مقادیر $i, j \in \{1 \ldots N\},$ و برای $1 < k \leq S_{\max}$ و برای مقادیر n>1 به فرمول زیر می رسیم:

$$t_{ij}(n|k) = \sum_{l=1}^{N} t_{lj}(n-1|k-1)\, b_{il}^a(0) + \sum_{l=1}^{N} \sum_{m=1}^{n-2} t_{lj}(n-m-1)\, b_{il}^a(m). \quad (8)$$

فرمول اول صادق است، چون از نقطه برتری سرور، هیچ تفاوتی میان خدمت رسانی به مشتری در مرتبه دیگر با زمان سرویسی که جدیداً نمونه گیری شده است  و خدمت رسانی به مشتری جدید وجود ندارد. همانند CAI، زمان سرویس موثر یک شکاف می گیرد و این در صورتی است که زمان سرویس هم یک شکاف بگیرد.

در این مورد، اولین شکاف زمان سرویس موثر نیز آخرین مورد است. بنابراین، ما به $t_{ij}(1|k) = \delta_{k-1}\delta_{i-j}$. می رسیم.

اجازه دهید $T_{ij}(z|k)$ و $T_{ij}(z)$ به ترتیب اشاره به pgf های متناظر با $t_{ij}(n|k)$ و $t_{ij}(n)$ داشته باشند، بنابراین، تغییرات تبدیل z استاندارد فرمول زیر را برای k>1 و $T_{ij}(z|1)$ حاصل می کنند.

$$T_{ij}(z|k) = \sum_{l=1}^{N} z\, T_{lj}(z|k-1)\, B_{il}^{a}(0) + \sum_{l=1}^{N} z\, T_{lj}(z)\, (B_{il}^{a}(z) - B_{il}^{a}(0)), \tag{9}$$

در همان روشی که برای CAI وجود دارد، مورد اول برای K>1 و $\mathbf{T}(z|1) = z\,\mathbf{I}_N$ به معادله ماتریس زیر تبدیل می شود

$$\mathbf{T}(z|k) = z\,\mathbf{B}^{a}(0)\,\mathbf{T}(z|k-1) + z\,(\mathbf{B}^{a}(z) - \mathbf{B}^{a}(0))\,\mathbf{T}(z), \tag{10}$$

با تلفیق این مورد با مورد قبلی و با اعمال معادله (10) داریم:

$$\mathbf{T}(z|k) = \mathbf{\Omega}_k(z) + \mathbf{\Theta}_k(z)(\mathbf{B}^{a}(z) - \mathbf{B}^{a}(0))\,\mathbf{T}(z), \tag{11}$$

که در آن $\mathbf{\Omega}_k(z)$ و $\mathbf{\Theta}_k(z)$ به ترتیب به شرح زیر تعریف شده اند

$$\mathbf{\Omega}_k(z) = z\,\left(z\,\mathbf{B}^{a}(0)\right)^{k-1}, \tag{12}$$

و

$$\mathbf{\Theta}_k(z) = (z\,\mathbf{B}^{a}(0) - \mathbf{I}_N)^{-1}\,((z\,\mathbf{B}^{a}(0))^{k-1} - \mathbf{I}_N)\,z, \tag{13}$$

با جمع کل زمان های سرویس ممکن با توجه به توزیع زمان سرویس داریم

$$\mathbf{T}(z) = \mathbf{\Omega}(z) + \mathbf{\Theta}(z)\,(\mathbf{B}^{a}(z) - \mathbf{B}^{a}(0))\,\mathbf{T}(z). \tag{14}$$

در اینجا $\mathbf{\Omega}(z)$ و $\mathbf{\Theta}(z)$ به ترتیب با فرمول های زیر داده شده اند:

$$\mathbf{\Omega}(z) = \sum_{k=1}^{s_{\max}} s(k)\, \mathbf{\Omega}_k(z), \tag{15}$$

و

$$\mathbf{\Theta}(z) = \sum_{k=1}^{s_{\max}} s(k)\, \mathbf{\Theta}_k(z), \tag{16}$$

همانند CAI، ماتریس $\mathbf{T}(z)$ در تحلیل صف بندی استفاده خواهد شد؛ به بخش 4 و 5 رجوع نمایید.

### 3-3- تکرار پس از وقفه

برای RAI می توانیم به همان شیوه ای که برای CAI و RAI,wr ادامه می دادمی جلو برویم. اما قرار دادن مبنای تحلیلمان بر روی نتایج حاصله برای RAI,wr ساده تر است. به این منظور، توجه داشته باشید که وقتی سرویس تعیین کننده باشد RAI و RAI,wr مشابه هم عمل می کنند. این مشاهده ای است که همان نمونه گیری مجدد در همان زمان سرویس حاصل خواهد شد. چون زمان سرویس هیچ گاه برای RAI تغییر نمی کند، عنی pmf (و pgf)، روی زمان سرویس معادل با pmf (و pgf) شر گذاشته است، با فرض اینکه زمان سرویس تعیین کننده ای وجود دارد. این مشاهدات نشان می دهند که pgf زمان سرویس موثر یک مشتری با توجه به اینکه زمان سرویس آن k شکاف است، می تواند با جایگزینی $s(k) = \delta_k$ - یعنی pmf متناظر با زمان سرویس طول ثابت k شکاف – در معادلات 14 تا 16 بدست آید

$$\mathbf{T}(z|k) = (\mathbf{I}_N - \mathbf{\Theta}_k(z)\,(\mathbf{B}^a(z) - \mathbf{B}^a(0)))^{-1}\, \mathbf{\Omega}_k(z), \tag{17}$$

که در آن ماتریس های $\mathbf{\Omega}_k(z)$ و $\mathbf{\Theta}_k(z)$ به ترتیب در فرمول های (12) و (13) تعریف شده اند.

با جمع کا زمان های سرویس ممکن با توجه به احتمالات آنها در مورد عملیات RAI معادله زیر برای ماتریس $\mathbf{T}(z)$ حاصل می شود

$$\mathbf{T}(z) = \sum_{k=1}^{S_{\max}} s(k) \left(\mathbf{I}_N - \mathbf{\Theta}_k(z) (\mathbf{B}^a(z) - \mathbf{B}^a(0))\right)^{-1} \mathbf{\Omega}_k(z). \quad (18)$$

ماتریس $\mathbf{T}(z)$ در بخش های زیر استفاده خواهد شد.

## 4- محتوای صف

ما ابتدا محتوای صف در در سرآغاز حرکت ها در نظر می گیریم، یعنی، در آغاز یک شکاف پس از شکافی که در آن مشتری سیستم را ترک می کند. $U_k$ را برابر محتوای صف در آغاز حرکت Kامین مشتری قرار دهید و $Q_k$ را برابر حالت فرایند تعطیلی در عرض شکافی قرار دهید که در آن این مشتری سیستم را ترک می کند. به علاوه، $U_k(z, j)$ را برابر pgf جزئی متناظر با محتوای صف در kامین آغاز حرکت و حالت متناظر فرایند تعطیلی قرار دهید، برای مقادیر $j \in \{1 \dots N\}.$ داریم:

$$U_k(z, j) \triangleq \mathrm{E}\left[z^{U_k} | Q_k = j\right] \Pr\left[Q_k = j\right], \quad (19)$$

برای سادگی نشانه گذاری، ما $\mathbf{U}_k(z)$ را برابر بردار سطری با عناصر $U_k(z, j),$ قرار می دهیم

$$\mathbf{U}_k(z) = \left[U_k(z, 1) \dots U_k(z, N)\right]. \quad (20)$$

حال ما محتوای صف را در k امین و (k+1) امین آغاز حرکت مرتبط می سازیم. با توجه به ینکه صف پس از حرکت kامین مشتری خالی است، تعطیلی توصیف شده با ماتریس $\mathbf{B}^c(z)$ در نظر گرفته شده است و پس از ان تعطیلی ها با ماتریس $\mathbf{B}^a(z)$ تا زمانی توصیف شده اند که حداقل یک مشتری در صف پس از بازگشت از تعطیلی وجود داشته باشد. پس از آن به یک مشتری سرویس دهی می شود که سیستم را در (k+1) امین آغاز حرکت ترک می کند. از طرف دیگر، با توجه به اینکه kامین مشتری یک سیستم غیر خالی را پشت سر گذاشته و ترک می کند، تعطیلی توصیف شده با ماتریس $\mathbf{B}^b(z)$ در نظر گرفته شده است، و (k+1) امین  مشتری سرویس گرفتن را پس از آن به سرعت آغاز می کند. با استفاده از چند تغییر

ماتریس و تبدیل z استاندارد، می توان رابطه زیر را میان بردارهای $\mathbf{U}_{k+1}(z)$ و $\mathbf{U}_k(z)$, بازیابی نمود

$$\mathbf{U}_{k+1}(z) = (\mathbf{U}_k(z) - \mathbf{U}_k(0))\ \mathbf{B}^b(E(z))\,\frac{1}{z}\,\mathbf{T}(E(z)) + \mathbf{U}_k(0)\ \left(\mathbf{B}^c(E(z)) - \mathbf{B}^c(e_0)\right)\ \frac{1}{z}\,\mathbf{T}(E(z))$$
$$+\mathbf{U}_k(0)\,\mathbf{B}^c(e_0)\,\mathbf{\Lambda}(z)\,\frac{1}{z}\,\mathbf{T}(E(z)), \tag{21}$$

که در آن ما فرمول زیر را برای مقادیر $k = a, \ldots, d$ برای سادگی نشانه گذاری ارائه می کنیم

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{B}}^d(e_0)^i\ \left(\tilde{\mathbf{B}}^d(E(z)) - \tilde{\mathbf{B}}^d(e_0)\right)\\ &= \left(\mathbf{I}_N - \tilde{\mathbf{B}}^d(e_0)\right)^{-1}\left(\tilde{\mathbf{B}}^d(E(z)) - \tilde{\mathbf{B}}^d(e_0)\right)\end{aligned} \tag{22}$$

و

$$\tilde{\mathbf{B}}^k(z) = z\mathbf{B}^k(z) \tag{23}$$

عبارات بعدی در سمت راست معادله (21) متناظر با (1) موردی هستند که در آن به محض حرکت k امین مشتری چندین مشتری دیگر در صف قرار دارند، (2) موردی که در آن هیچ به محض حرکت k امین مشتری هیچ مشتری دیگری در صف وجود ندارد، اما پس از تعطیلی که بعد از خروج این مشتری در نظر گرفته شده است مشتریان وارد صف می شوند و (3) موردی که در آن هنوز پس از تعطیلی ذکر شده قبلی هیچ مشتری در صف وجود ندارد.

با در نظر گرفتن این فر که سیستم تحت بررسی به توازن می رسد، U(z) را برابر بردار pgf جزئی محوای ف در زمان حرکت در موازنه قرار دهید. معادله اول فرمول زیر را حاصل می کند

$$\mathbf{U}(z)\mathbf{\Gamma}_1(z) - \mathbf{U}(0)\mathbf{\Gamma}_2(z) = 0, \tag{24}$$

با

$$\mathbf{\Gamma}_1(z) = z\,\mathbf{I}_N - \mathbf{B}^b(E(z))\,\mathbf{T}(E(z)), \tag{25}$$
$$\mathbf{\Gamma}_2(z) = \left[\mathbf{B}^c(E(z)) - \mathbf{B}^b(E(z))\right]\ \mathbf{T}(E(z)) + \mathbf{B}^c(e_0)\,(\mathbf{\Lambda}(z) - \mathbf{I}_N)\,\mathbf{T}(E(z)). \tag{26}$$

معادله (24) نشان می دهد که سیستم تعطیلی تحت بررسی در سرآغاز حرکت از نوع M/G/1 است. بنابراین می توان بردار ناشناخته U(0) را به شرح زیر بازیابی کرد.

1. تمام نقاط $\xi_j$ را در $|z| < 1$ که در آن $\mathbf{\Gamma}_1(z)$ منحصربفرد است بیابید. برای هر $\xi_j$، یک بردار ستونی غیر صفر $\Xi_j$ بیابید به گونه ای که $\mathbf{\Gamma}_1(\xi_j)\Xi_j = 0.$ باشد.

2. برای تمام مقادیر j، $\xi_j$ را در معادله (24) قرار دهید و آن را در $\Xi_j$ متناظر در سمت راست صرب کنید، که این منجر به ایجاد معادله ای خطی برای بردار ناشناخته U(0) می شود.

شرایط نرمال سازی $\mathbf{U}(1)\,\mathbf{e}^T = 1$ منجر به ایجاد معادله خطی دیگری برای بردار ناشناخته U(0) می شود. در اینجا $\mathbf{e}^T$ اشاره به برداری ستونی $N \times 1$ دارد که تمام عناصر آن مساوی 1 هستند.

4. بردار ناشناخته U(0) پس از آن با حل مجموعه اول از معادلات خطی حل شده است.

وقتی U(0) بازیابی می شود، می توان U(z) را با استفاده از معادلات 24 تا 26 تعیین کرد.

حال ما روی pgf محتوای بافر در سرآغازهای متفاوت زمانی تمرکز می کنیم. واضح است که pgf محتوای بافر در سرآغازهای حرکت U(z) با فرمول زیر داده شده است

$$U(z) = \mathbf{U}(z)\,\mathbf{e}^T. \tag{27}$$

تحت این فرض که هیچ ورود همزمانی به شکاف ها وجود ندارد، pgf اول نیز pgf محتوای صف در لحظه ورود نیز هست. به علاوه pgf N(z) محتوای بافر در کران های شکاف تصادفی تابع تولید U(z) محتوای بافر را در سرآغاز حرکت مشتریان به فرمول زیر ربط می دهد:

$$N(z) = E'(1)\,\frac{1-z}{1-E(z)}\,U(z). \tag{28}$$

اهمیت  ویژگی تولید pgf به ما این امکان را می دهد تا به مقیاس های عملکرد مختلفی نظیر میانگین و واریانس محتوای صف در موازنه دست یابیم.

## 5- تأخیر مشتری

یک مشتری تصادفی را در نظر بگیرید و D را برابر تأخیر این مشتری قرار دهید، U مساوی تعداد مشتریان در صف به محض حرکت این مشتری است و $\hat{E}$ اشاره به تعداد مشتریانی دارد که در طول همان شکاف سرویس رسانی مشتری نشانه گذاری شده پس از آن مشتری خدمات دریافت می کنند. بنابراین متغیر به صورت زیر است:

$$U = \hat{E} + \sum_{j=1}^{D} E_j, \tag{29}$$

با $E_j$ که تعداد ورودها در عرض jامین شکافی است که مشتری در صف صرف می کند. این عبارت از این حقیقت متبعت می کند که تمام مشتریانی که در صف هستند به محض حرکت مشتری نشانه گذاری شده، یا در عرض این تأخیر مشتری یا در همان شکاف پس از مشتری نشانه گذاری شده وارد سیستم می شوند. متأسفانه، $\hat{E}$ و D همبسته اند. اما اجتناب از این مشکل همبستگی با استفاده از مشی رویس دسته ای مشتری ممکن است.

دسته اشاره به تعداد مشتریانی دارد که در عرض شکاف تصادفی وارد می شوند که در آن حداقل یک مشتری رسیده است. به دلیل طبیعت i.i.d فرایند ورود، تعداد ورود دسته ای در عرض شکاف های متوالی شامل یک سری از متغیرهای تصادفی توزیع شده برنولی است. در عرض یک شکاف با احتمال 1-E(0) ورود دسته ای وجود دارد. به این دلیل، pgf مشترک تعداد ورودهای دسته ای در عرض شکاف های متوالی با فرمول زیر داده شده است

$$\tilde{E}(z) = E(0) + (1 - E(0))z. \tag{30}$$

زمان سرویس موثر دسته ای به عنوان تعداد شکاف های میان آغاز شکافی تعریف شده که در آن اولین مشترین دسته برای اولین بار خدمات دریافت می کند و پایان شکافی که در آن آخرین مشتری دسته سیستم را ترک می گوید. به همین دلیل زمان سرویس موثر دسته ای معادل با جمع زمان های سرویس موثر تمام مشتریان در دسته و تعطیلی هایی است که می توانند بین خدمت رسانی به مشتریان دسته رخ دهند. $\tilde{\mathbf{T}}(z)$ را برابر ماتریس pgf شرطی زمان های سرویس موثر دسته است، بنابراین داریم

$$\tilde{\mathbf{T}}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e(j)}{1-e(0)} \left(\mathbf{T}(z)\,\mathbf{B}^b(z)\right)^{j-1} \mathbf{T}(z). \tag{31}$$

می توانیم pgf محتوای صف را در زمان های حرکت دسته با جایگزین کردن زمان سرویس موثر با زمان سرویس موثر و ورودهای مشتری با ورودهای مشتری دسته ای در عبارات بخش قبلی بدست آوریم. این منجر به ایجاد بردار $\tilde{\mathbf{U}}(z)$، می شود، یعنی بردار pgf جزئی محتوای صف در دسته ها در زمان های حرکت دسته. توجه داشته باشید که $\tilde{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{U}(0)$ است چون هیچ دسته ای د صف اشاره به هیچ مشتری در صف ندارد و رعکس.

زمان انتظار دسه ای اشاره به تعداد شکاف های میان پایان شکافی دارد که در آن دسته به صف وارد می شود و آغاز شکافی که در آن اولین مشتری دسته خدمت رسانی می شود. تمام دسته ها در صف به محض حرکت یک دسته یا در عرض زمان انتظار دسته یا زمان سرویس موثر دسته ای در این دسته وارد سیستم می شوند چون حداکثر یک ورود دسته ای در عرض یک شکاف وجود دارد. $\tilde{\mathbf{W}}(z)$ اشاره به بردار pgf جزئی زمان انتظار دسته دارد، بنابراین،

$$\tilde{\mathbf{U}}(z) = \tilde{\mathbf{W}}(\bar{E}(z))\,\tilde{\mathbf{T}}(\bar{E}(z)). \tag{32}$$

واضح است که عبارت قبلی به ما امکان تعیین $\tilde{\mathbf{W}}(z)$ را بر حسب متغیرهای شناخته شده می دهد.

در نهایت، تأخیر مشتری نشانه گذاری شده شامل زمان انتظار دسته ای است که این مشتری به آن متعلق است و از زمان سرویس موثر تمام مشتریانی است که در عرض شکاف ورود مشتری نشانه گذاری شده رسیده اند که قبل از مشتری نشانه گذاری شده به آنها خدمات ارائه شده است. D(z) اشاره به تأخیر مشتری تصادفی دارد، بنابراین

$$D(z) = \tilde{\mathbf{W}}(z) \sum_{j=0}^{\infty} \dot{e}(j) \left(\mathbf{T}(z)\, \mathbf{B}^{b}(z)\right)^{j} \mathbf{T}(z)\mathbf{e}^{T}, \tag{33}$$

که در آن $\dot{e}(j)$ اشاره به احتمال آن دارد که j مشتری وجود داشته باشند که در شکاف ورود مشتری تصادفی می رسند اما قبل از این مشتری تصادفی خدمات دریافت کرده اند. این احتمال با فرمول 41 داده شده است.

$$\dot{e}(j) = \frac{1}{E'(1)} \sum_{k=j}^{\infty} e(k). \tag{34}$$

اهمیت ویژگی تولید pgf به ا اجازه می دهد تا مقیاس های عملکردی نظیر میانگین و واریانس تأخیر مشتری را تعیین کنیم. توجه داشته باشید که جمع های نامتناهی در معادلات 31 و 33 مشکلاتی که در تجزیه ریشه مشخصه ماتریس $(\mathbf{T}(1)\, \mathbf{B}^{p}(1))$ پس از انحراف و ارزیابی در z=1 این عبارات با آن مواجه می شویم را تحمیل نمی کنند. 6- موارد خاص

همانطور که در بخش مقدمه ذکر شد، مدل ما می تواند رفتار مدل های تعطیلی مختلف موجود را ثبت و ضبط نماید. برخی از این موارد در اینجا ذکر شده اند.

### 6-1- سیستم های تعطیلی گسترده (جامع)

در سیستم هایی که تعطیلی های جامعی دارند، سرور هرگاه صف پس از حرکت یک مشتری خالی شود تعطیلی را شروع می کند (وارد دوره استراحت می شود). اگر صف به محض بازگشت از یک تعطیلی هنوز هم خالی باشد، سرور یا به سرعت تعطیلی دیگری در پیش می گیرد و یا تا زمانی که مشتری جدید وارد

شود بیکار می ماند. می توان به این سیاست ها به ترتیب با عنوان سیاست تعطیلی چندتایی و منفرد اشاره کرد.

با این فرض که تعطیلی های متوالی شامل یک سری متغیر تصادفی .i.i.d هستند، رفتار صف $\mathrm{Geo}^X/G/1$ با چندین تعطیلی و تعطیلی منفرد را می توان با استفاده از ماتریس تعطیلی $1 \times 1$ زیر بازیابی کرد

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^a(z) &= \mathbf{B}^b(z) = [1],\\ \mathbf{B}^c(z) &= [V(z)],\end{aligned} \tag{35}$$

و به ترتیب برای سیستم تعطیلی تکی و چندتایی با استفاده از $\mathbf{B}^d(z) = [1]$ یا $\mathbf{B}^d(z) = \left[\frac{V(z)}{z}\right]$ . در اینجا، V(z) اشاره به pgf تعطیلی های متوالی دارد. چون هیچ تعطیلی در عرض سرویس رسانی به مشتری وجود ندارد، مورد دوم هیچ گاه دچار وقفه نمی شود و بنابراین زمان های سرویس موثر مشتری برابر زمان سرویس آن است. به همین دلیل، واضح است که نیازی به تحمیل کران بالایی برای زمان های سرویس مشتری وجود ندارد. نتایج ما با نتایج Takagi مغایرت دارند.

توجه داشته باشید که چارچوب موجود امکان بسط های متنوع سیستم های تعطیلی جامع را می دهد. به عنوان مثال، توزیغ دوره تعطیلی می تواند وابسته به تعداد تعطیلی های در پیش گرفته شده باشد. چنین سیستم های تعطیلی برای مطالعه عملیات حالت خواب در شبکه های بی سیم استفاده شده اند نظیر WiMax و LTE.

### 6-2- سیستم های صف بندی با وقفه ها

سیستم $\mathrm{Geo}^X/G/1$ را در نظر بگیرید که در آن سرور تکی بین دوره های دسترسی و دوره های تعطیلی متناوباً حرکت می کند، مستقل از بقیه سیستم. بخصوص، می توان موردی را در نظر گرفت که در آن دوره های دسترسی و تعطیلی متوالی با یک سری متغیر تصادفی i.i.d مدلسازی شده اند و در آن دوره های

دسترسی در توزیع هندسی معمول با هم اشتراک دارند. در بخش 6 نشان داده شه که چنین مدلی عملکرد ترافیک با اولویت پایین را در صف اولویت انحصاری $\mathrm{Geo}^X/G/1$ ثبت و ضبط می نماید. می توان به سادگی تأیید کرد که ماتریس تعطیلی زیر برای مقادیر $k = a, \ldots, d$! متناظر با سیستم تحت بررسی است

$$\mathbf{B}^k(z) = \left[\alpha + (1-\alpha)\,V(z)\right], \tag{36}$$

در اینجا $\alpha$ اشاره به احتمال این دارد که یک دوره دسترسی در عرض شکاف بعدی ادامه یابد و V(z) اشاره به pgf مشترک دوره های تعطیلی دارد. نتایج قبلی با نتایج ارائه شده در بخش 6 مغایرت دارند. می توان تأیید کرد که در این مورد خاص مجبور نیستیم کران بالایی برای زمان های سرویس تعیین کنیم.

## 6-3- سیستم های محدود زمانی غیر انحصاری

در سیستم های محدود زمانی، سرور هر گاه که هیچ مشتری برای خدمت رسانی وجود نداشته باشد یا هر گاه زمان سنج منقضی شود به تعطیلات می رود. در مورد سیستم های تعطیلی محدود زمانی غیر انحصاری، سرور پس از اتمام سرویس رسانی یک مشتری که در عرض آن زمان سنج منقضی می شود به دوره تعطیلی می رود. اگر یک سیستم $\mathrm{Geo}^X/G/1$ محدود زمانی را با تایمرهای توزیع شده هندسی در نظر بگیریم، می توانیم مقیاس های عملکرد این سیستم را با استفاده از ماتریس های زیر بازیابی نماییم

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^a(z) &= \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}^b(z) = \mathbf{B}^c(z) &= \begin{bmatrix} \alpha + (1-\alpha)V(z) & 0 \\ V(z) & 0 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{B}^d(z) &= \begin{bmatrix} \frac{V(z)}{z} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{37}$$

در اینجا، $\alpha$ اشاره به احتمال این دارد که تایمر در عرض یک شکاف منقضی نشود و V(z) اشاره به pgf مشترک اشتراکی تعطیلی های متوالی دارد. توجه داشته باشید که حالت 1 متناظر با شکاف هایی است که در آن ها تایمر فعال است، در حالی که حالت 2 متناظر با شکاف هایی است که در آنها این مورد صادق

نیست. نتایج با نتایج ارائه شده در بخش 44 مغایرت دارند. باز هم می توان تأیید کرد در این مورد مجبور نیستیم کران بالایی برای زمان های سرویس تعیین کنیم.

### 6-4- سیستم های تعطیلی محدود E

برای سیستم های تعطیلی محدود E یا سیستم های تعطیلی محدود به تعداد جامع، سرور هر گاه که هیچ مشتری دیگری برای خدمت رسانی وجود نداشته باشد یا هرگاه تعداد ثابتی از مشتریان یعنی N تا آخرین تعطیلی سرویس رسانی شده باشند به تعطیلات می رود. مدل ما در صورت به سیستم چند تعطیلی محدود $\mathrm{Geo}^X/G/1$ ساده می شود که ماتریس های تعطیلی زیر را در نظر بگیریم

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}^a(z) = \mathbf{I}_N, \\ &\mathbf{B}^b(z) = \mathbf{B}^c(z) = \left[\delta_{i-j+1} + \delta_{i-N}\delta_{j-1}V(z)\right]_{i,j=1\ldots N}, \\ &\mathbf{B}^d(z) = \frac{V(z)}{z}\ \left[\delta_{j-1}\right]_{i,j=1\ldots N}. \end{aligned} \tag{38}$$

در اینجا V(z) اشاره به pgf مشترک دوره های تعطیلی متوالی دارد. در عرض سرویس مشتری، حالت تعطیلی متناظر با تعداد مشتریانی است که از زمان آخرین تعطیلی سرویس را شروع کرده اند. واضح است که در این مورد مجبور نیستیم کران بالایی برای زمان های سرویس تعیین کنیم چون سرویس هیچ گاه دچار وقفه نمی شود. نتایج با نتایج ارائه شده در بخش 9، صفحات 214-209 مغایرت دارند.

## 7- کاربردها

حال ما به چند کاربرد عملی توجه می کنیم. بخصوص، چند مدل صف بندی اولویت و یک دسترسی چند گانه ناقل ساده شده را با پروتکل تشخیص برخورد (CSMA/CD) بررسی می کنیم.

### 7-1- صف های اولویت انحصاری

یک صف اولویت انحصاری دو رده ای را در نظر بگیرید.بسته های با اولویت پایین (LP) تنها زمانی انتقال می یابند که هیچ بسته با اولویت بالایی در سیستم وجود نداشته باشد. بنابراین، از نظر مزیت بسته های

LP، کانال انتقال برای گذراندن تعطیلی در عرض دوره های مشغولی HP سیستم را ترک می کند – دوره هایی که در آن ها بسته های HP انتقال یافته اند. برای ترتیب ها صف بندی اولویت انحصاری، انتقال بسته های LP به هنگام رسیدن بسته های HP به تعویق می افتد. وقتی تمام بسته های HP انتقال یافتند، انتقال بسته LP یا از سر گرفته می شود یا با همان زمان انتقال یا زمان انتقال متفاوتی تکرار می شود. a.o. . مراجع موجود در اینجا را مشاهده نمایید.

مورد خاصی را در نظر بگیرید که بسته های HP در بافری با ظرفیت نامتناهی طبق فرایند ورود مارکوفی دسته ای گسسته (DBMAP) وارد می شوند و اینکه زمان های انتقال این بسته ها شامل یک سری متغیر تصادفی .i.i.d است. در این مورد، مقدار کار HP که در رض شکاف های متوالی رسیده است شمل یک سری متغیر تصادفی ماژوله شده مارکوفی است. $W_k$ این فرایند کاری HP را به صورت زیر تعریف می کند:

$$\mathbf{W}_k = \left[\Pr[W = k, Q' = j | Q = i]\right]_{i,j=1...N} \quad (39)$$

در اینجا W اشاره به میزان کار HP دارد که در عرض شکاف تصادفی وارد سیستم می شود، در حالیکه Q و $Q' \ (Q, Q' \in \{1 \ldots N\})$ به ترتیب اشاره به حالت فرایند ورود در عرض این شکاف تصادفی و شکاف زیر دارند.

ما در اینجا از تعریف دوره مشغول استفاده می کنیم: دوره مشغولیت HP در پایان شکافی شروع می شود که در آن هیچ بسته HP در سیستم وجود ندارد و در آغاز شکافی پایان می یابد که در آن صف HP برای اولین باز پس از آغاز دوره مشغولی خالی شده است. توجه داشته باشید که دوره های مشغولی شکاف 0 مطابق با این تعریف هستند. یک دوره مشغولی شکاف 0 متناظر با موردی است که در آن صف HP در عرض دو شکاف متوالی خالی باقی می ماند.

شکاف تصادفی را در نظر بگیرید که در آن صف HP خالی است. شکاف بعد از شکاف نشانه گذاری شده شکاف بعدی است که در آن صف HP در صورتی خالی است که هیچ ورودی در عرض شکاف نشانه گذاری شده وجود نداشته باشد. اگر ورودهایی وجود داشته باشند، دوره مشغولی معادل با جمع مقدار کاری است

که در عرض شکاف نشانه گذاری شده رسیده باشد، و با طول یک دوره مشغولی برای هر یک از واحدهای کاری که رسیده اند افزایش یافته است.

$$B = W + \sum_{j=1}^{W} B_j. \qquad (40)$$

در اینجا B اشاره به دوره مشغولی متناظر با شکاف نشانه گذاری شده دارد و $B_j$'s ها اشاره به دوره های مشغولی متناظر با واحدهای کاری دارند که در عرض شکاف نشانه گذاری شده وارد شده اند.

دوره های مشغولی تنها بسته به حالت فرایند کاری هستند که در عرض شکاف قبل از دوره مشغولی برای واحدهای کاری رخ داده اند. یعنی، دوره های مشغولی متوالی شامل یک سری متغیر تصادفی ماژوله مارکوفی هستند. B(z) اشاره به ماتریس pgf های شرطی جزئی دوره های مشغولی دارد:

$$\mathbf{B}(z) = \left[B_{ij}(z)\right]_{i,j=1\ldots N}, \qquad (41)$$

با

$$B_{ij}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[B = k, Q' = j | Q = i] z^k. \qquad (42)$$

در اینجا Q و $Q'$ به ترتیب اشاره به حالت فرایند کاری در عرض شکاف قبلی و شکاف بعدی دوره مشغولی دارند.

در بررسی معادله 40 و طبیعت مارکوفی دوره مشغولی، ما معادله عملیاتی زیر را برای ماتریس B(z) یافتیم

$$\mathbf{B}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k \, [z\,\mathbf{B}(z)]^k. \qquad (43)$$

معادله عملیاتی اول به ما امکان می دهد تا بصورت عددی B(z) و مشتقات آن را برای تمامی مقادیر z ارزیابی کنیم.

به خاطر آورید که دوره های مشغولی به عنوان دوره های تعطیلی توسط بسته های LP در نظر گرفته شده اند. به همین دلیل، در صورتی می توانیم عملکرد مشتریان با اولویت پایین را ارزیابی کنیم که فرض کنیم تمام ماتریس های تعطیلی مساوی با B(z) هستند:

$$\mathbf{B}^a(z) = \mathbf{B}^b(z) = \mathbf{B}^c(z) = \mathbf{B}^d(z) = \mathbf{B}(z). \tag{44}$$

بنابراین حالت عملیات CAI متناظر با صف بندی اولویت از سر گرفته شده انحصاری است، یعنی حالت RAI برای تکرار انحصاری صف بندی اولویت یکسان و حالت RAI,wr برای تکرار انحصاری صف بندی اولویت متفاوت.

## 2-7- CSMA/CD

یک شبکه باس half-duplex با کنترل دسترسی واسط مبتنی بر CSMA/CD را در نظر بگیرید. تمام فرستنده-گیرنده های شبکه مجهز به بافر خروجی برای ذخیره موقتی بسته های ارسالی هستند. واضح است که از نظر یک فرستنده-گیرنده های منفرد، خط خروجی فرستنده-گیرنده در طول مدتی از زمان قابل دسترسی نیست تا دیگر فرستنده-گیرنده ها بتوانند به باس دسترسی پیدا کنند، یعنی سورر بافر خروجی در مدتی برای تعطیلی سیستم را ترک می کند.

پروتکل CSMA/CD تحت بررسی به شرح زیر عمل می کند. هر گاه هیچ بسته ای برای مخابره وجود نداشته باشد، مخابره کننده تحت بررسی به کانال گوش می دهد. به محض ورود بسته ها، در صورتی که کانال در دسترس باشد مخابره کننده مخابره بسته ها را شروع می کند با انتقال بسته ها را تا زمانی که کانال در دسترس قرار گیرد به تعویق می اندازد. به دلیل وجود تأخیرهای مخابره در باس مشترک، ممکن است چندین مخابره کننده بصورت همزمان انتقال را شروع کنند. این منجر به برخوردهایی می شود که می توان آن ها را توسط مخابره کننده ها تشخیص داد. هر گاه برخوردی شناسایی شود ابتدا مخابره کننده دنباله ای فشرده ارسال می کند تا مطمئن شود که تمام مخابره کننده ها برخورد را شناسایی کرده اند و

پس از  انتظار به مدت تصادفی، به محض در دسترس قرار گرفتن کانال مجدداً بسته را منتقل می کند. به محض مخابره موفقیت آمیز، مخابره کننده کنترل واسط مخابره را رها می کند.

اکنون ما نشان می دهیم که چگونه می توان فرایند تعطیلی متناظر را ایجاد کرد. همانند بخش )45(، ما از این پس فر می کنیم که احتمال ثابت $\alpha$ وجود دارد که مخابره کر دیگری شروع ه مخابره در یک شکاف بکند، با توجه به اینکه مخابره کننده از دیگر مخابره ها آگاهی ندارد. تعطیلی های متناظر با زمانی که کانال در دسترس نیست  را به یاد داشته باشید.

ابتدا، فرایند تعطیلی را در عرض انتقال بسته در نظر بگیرید. وقتی مخابره شروع می شود، ممکن است برخوردهایی رخ دهد. پس از گذشت مدتی تمام مخابره کننده ها از انتقال فعلی آگاه می شوندو  هیچ برخوردی رخ نمی دهد. بنابراین ما دو حالت تعطیلی معرفی می کنیم. حالت 1 متناظر با فاز اولیه انتقال است. مخابره کننده دیگر مخابره را شروع می کند و باعث بروز برخورد با احتمال $\alpha$ می شود. برای سادگی تحلیل، ما فرض می کنیم که طول این فاز اولیه از نظر هندسی با میانگین $1/(1-p)$ توزیع شده است، یعنی، فرایند تعطیلی در عرض شکاف زیر با احتمال $p$ در حالت 1 می ماند. به علاوه، حالت 2 متناظر با موردی است که در آن هیچ  برخورد دیگری وجود ندارد. هر گاه فرایند تعطیلی در عرض مخابره وارد حالت 2 می شود، تا پایان مخابره در حالت 2 می ماند. این منجر به ایجاد ماتریس تعطیلی زیر می شود

$$\mathbf{B}^{a}(z) = \begin{bmatrix} p\,\eta(z) & (1-p)\,\eta(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (45)$$

با

$$\eta(z) = 1 - \alpha + \alpha V_1(z). \qquad (46)$$

در اینجا $V_1(z)$ تابع تولید احتمال دوره ای است که مخابره کننده باید قبل از شروع انتقال منتظر بماند.

این دوره شامل دنباله فشرده،  زمان انتظار تصادفی و زمان صرف شده تا آزاد شدن کانال است.

در پایان مخابره یا هر گاه هیچ کاری در صف وجود نداشته باشد، مخابره کننده های دیگری می توانند به کانال دسترسی داشته باشند. وقتی مخابره کننده دیگری شروع به انتقال با احتمال $V_1(z)$ می کند، ما در می یابیم که

$$\mathbf{B}^b(z) = \mathbf{B}^c(z) = \mathbf{B}^d(z) = \begin{bmatrix} 1-\alpha+\alpha V_2(z) & 0 \\ 1-\alpha+\alpha V_2(z) & 0 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

در اینجا $V_2(z)$ اشاره به pgf شماره شکاف هایی دارد که مخابره کننده دیگری به کانال دسترسی پیدا می کند.

مدل تعطیلی را می توان بسط داد تا ویژگی های دیگر پروتکل های CSMA/CD نیز در آن شرکت داشته باشند، به عنوان نمونه حالات اضافی را می توان برای مشارکت افزایش نمایی تایمر back-off تعریف کرد، می توان همبستگی را در اشغال کانال با دیگر مخابره کننده ها تعبیه کرد یا طول دوره برخورد را با دقت بیشتری مدلسازی کرد.

## 8- نتیجه گیری

ما سیستم صف بندی $\mathrm{Geo}^X/G/1$ زمان گسسته مربوط به تعطیلی های همبسته را در نظر گرفتیم و عبارتی برای pgf محتوای صف در آغازهای مختلف در زمان و تأخیر مشتری بدست آوردیم. ما نشان دادیم که مدل ما مدل های تعطیلی موجود مختلف را تعمیم می دهد و سودمندی صف های همراه با تعطیلی ها را در ترافیک مخابرانی با استفاده از چند کاربرد عملی تر شرح دادیم.