اندازه گیری تراکم در تحلیل غیر پارامتری تحت فناوری به طور ضعیف قابل حذف[1] (با حذف پذیری ضعیف)

نکات برجسته

- رویکردی برای اندازه گیری تراکم در حضور خروجی های(ستانده های) مطلوب و نامطلوب توسعه می یابد.
- رویکرد پیشنهادی می تواند بین DMU[2]های (واحد های تصمیم گیری) متراکم و DMU های واقعا کارامد تمایز قائل شود.
- یک مثال تجربی به منظور تشریح و شفاف سازی رویکرد پیشنهادی استفاده می شود.

چکیده

تراکم یک پدیده اقتصادی بسیار متداول می باشد که در آن خروجی ها به دلیل مقدار بیش از حد ورودی ها کاهش می یابند. رویکرد های قبلی برای شناسایی تراکم در تجزیه تحلیل غیر پارامتری تنها خروجی های مطلوب را در نظر می گیرند. در فرایند تولید، خروجی های نامطلوب معمولا به طور مشترک با خروجی های مطلوب تولید می شوند. در این مقاله، ما یک رویکردی را برای اندازه گیری تراکم در حضور هم زمان خروجی های مطلوب و نامطلوب ارایه می کنیم. رویکرد پیشنهادی می تواند بین DMU های متراکم وdmu های واقعا کارامد تمایز قایل شود که همگی بر طبق امتیازات محاسبه شده توسط تابع فاصله ای جهت دار کارامد می باشند. در نهایت یک مثال تجربی برای توضیح این رویکرد استفاده می شود.

لغات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها، خروجی نامطلوب، تراکم

1-مقدمه

مفهوم تراکم که اولین بار توسط فیر و سونسون(1989) معرفی شد، یک پدیده گسترده می باشد که در آن مقدار مازاد و بیش از حد ورودی منجر به کاهش خروجی می شود. متعاقبا، این مفهوم توسط فیر و همکاران(1985) و کوپر و همکاران(1996، 2000) در زمینه تحلیل پوششی داده ها(DEA) بسط و توسعه یافت. از آن زمان به بعد،

[1] weakly disposable technology

[2] Decision making units

مسئله تراکم در چارچوب تحلیل پوششی داده ها توجه ویژه ای را به خود جلب کرده است و چندین رویکرد برای شناسایی تراکم پیشنهاد شده اند(براکت و همکاران 1998، آر و گراسکوپف2000، کوپر و همکاران 2001 الف، چرچی و همکاران 2001، تون و ساهو 2004، سویوشی و سکیتانی 2009، کائو 2010، خوینی و همکاران 2003). فیر و همکاران(1985) یک رویکرد مدل شعاعی را ارایه کردند که در این رویکرد تراکم به صورت تفاوت بین فناوری ها تحت ورودی های با قابلیت حذف ضعیف و قوی اندازه گیری شد.کوپر و همکاران (1996) یک رویکرد جمعی را پیشنهاد کردند که در آن اثر تراکم به صورت اختلاف بین مقادیر مشاهده شده و مقادیر مورد انتظار اندازه گیری می شود.کوپر و همکاران(2001 الف) اقدام به مقایسه رویکرد های فوق کرده و اظهار کردند که رویکرد ارایه شده توسط فیر و همکاران(1985) قادر به شناسایی تراکم در برخی شرایط نیست. در رابطه با موضوع تراکم به برخی مباحثات مراجعه کنید(فیر و گراسکوپف 2000، کوپر و همکاران 2001 ب، چرچی 2001).

به علاوه، تون و ساهو(2004) یک ارتباط نظری را بین تراکم و بازده نسبت به مقیاس(RTS) ارایه کردند. به علاوه، رویکرد آن ها قادر به تشخیص وضعیت تراکم قوی و ضعیف است. با این حال، تون و ساهو(2004) به طور ضمنی یک راه حل بهینه منحصر به فرد را در بررسی تراکم مبتنی بر تحلیل پوششی داده ها مطرح کردند. در حضور راه حل های مختلف در اندازه گیری تراکم،پیامد های اقتصادی تراکم بدست آمده با تون و ساهو(2004)، همگی از حیث دیدگاه های نظری و عملی، مسئله آفرین می باشند. برای حل این مسئله، سویوشی و سگیتاری(2009) یک رویکرد تحلیلی را برای مدیریت چندین راه حل پیشنهاد کرده و درجه تراکم گسترده را اندازه گیری کردند.

با این حال، همه رویکرد های قبلی مربوط به تراکم، تنها خروجی های مطلوب را در نظر می گیرند. در فرایند تولید، خروجی های نامطلوب معمولا به طور مشترک با خروجی های مطلوب تولید می شوند. بنابر این، یک چارچوب جدید برای اندازه گیری تراکم بایستی در حضور هم زمان خروجی های مطلوب و نامطلوب توسعه یابد. یک مقاله پیشگام توسط فیر و همکاران(1989)، خروجی های نامطلوب را به صورت قابل حذف به طور ضعیف در نظر گرفته است، به این معنی که کاهش خروجی های خوب منجر به کاهش با نسبت یکسان خروجی های نامطلوب می شود(چانگ و همکاران 1997، وبر و دموازلیکی 2001، فیر و گراسکوپف 2003، 2004، 2009، کوزمانن 2005، کوزمانن و کورتلینن 2005، زو و همکاران 2008، کوزمانن و پودینوسکی 2009، کوزمانن و متین 2011، پیکازو تادو و همکاران 2012). در نظر گرفتن خروجی های نامطلوب در شکل اولیه و اصلی آن ها با فرض قابلیت حذف

ضعیف، با قوانین فیزیکی و اصول بدیهی استاندارد تئوری تولید متناسب است(فیر و گراسکوپف 2003، 2004، 2009، ساهو و همکاران 2011). بر اساس فناوری با قابلیت حذف ضعیف، بسیاری از مطالعات تجربی از مدل تابع فاصله ای جهت دار استفاده کرده اند(چانگ و همکاران 1997) که خروجی های مطلوب را توسعه داده و خروجی های نامطلوب و ورودی ها را در امتداد مسیر بردار هادی برای ارزیابی کارایی کاهش می دهد.

در این مقاله، بر اساس تابع فاصله جهت دار، ما یک رویکرد را برای شناسایی وقوع تراکم(قوی و ضعیف) در حضور هم زمان خروجی های مطلوب و نامطلوب توسعه می دهیم. جدا از شرایط سنتی و متعارف که تنها از خروجی های مطلوب استفاده می کنند، پی برده شد که حتی اگر یک واحد تصمیم گیری با تابع فاصله ای جهت دار کارامد باشد، احتمال بروز تراکم حتی با در نظر گرفتن هر دو خروجی های مطلوب و نامطلوب وجود خواهد داشت. از طریق رویکرد پیشنهادی ما، ما اقدام به تمایز بین DMU های متراکم و DMU های واقعا کارامد می کنیم که همگی بر طبق امتیازات محاسبه شده توسط تابع فاصله ای جهت دار محاسبه می شوند.

ادامه این تحقیق به صورت زیر سازمان دهی شده است: در بخش 2، مفاهیم تراکم قوی و ضعیف در حضور خروجی های مطلوب و نامطلوب تعریف می شوند.بخش 3 رویکردی را برای شناسایی وقوع تراکم قوی و ضعیف ارایه می کند. بخش 4 رویکرد پیشنهادی را با سه رویکرد معرف موجود مقایسه کرده و رویکرد پیشنهاد شده را برای تحلیل مجموعه داده های تجربی متشکل از 20 نیروگاه استفاده می کند. بخش 5 شامل نتیجه گیری مقاله است.

2- مقدمات

فرض کنید که K واحد وجود دارد و هر واحد از یک بردار ورودی $x \in \mathbf{R}_+^N$ برای تولید یک بردار خروجی های خوب $y \in \mathbf{R}_+^M$ و خروجی های بد $b \in \mathbf{R}_+^I$ استفاده می کند. فناوری تولید متشکل از همه (x, y, b) های ممکن است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Omega = \{(x, y, b) | x \text{ می تواند } (y, b) \text{ را تولید کند}\} \qquad (1)$$

با توجه به این که تعداد K واحد تصمیم گیری مشاهده شده را در نظر می گیریم، مجموعه فناوری تولید را می توان به صورت زیر تدوین کرد:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (x, y, b) : \theta\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} \geq y_m & m = 1, \cdots, M \\ \theta\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} = b_i & i = 1, \cdots I \\ \sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} \leq x_n & n = 1, \cdots N \end{Bmatrix} \quad (2)$$

با در نظر گرفتن یک نمونه ای از تعداد K واحد تصمیم گیری مشاهده شده، ناکارامدی برای واحد K0 نرخ بازده نسبت به مقیاس ثابت را نشان داده و حذف پذیری ضعیف را می توان با تابع فاصله جهت دار زیر محاسبه کرد(چانگ و همکاران 1997):

$$IE(k_o) = \max \ \delta \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} \geq y_{k_o m} + \delta y_{k_o m} && m = 1, \cdots, M \\ &\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} = b_{k_o i} - \delta b_{k_o i} && i = 1, \cdots I \\ &\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} \leq x_{k_o n} - \delta x_{k_o n} && n = 1, \cdots N \\ &z_k \geq 0 && k = 1, \cdots, K \end{aligned}$$

که $z = (z_1, \cdots, z_K)$ اشاره به متغیر های شدت دارد و $g = (x_{k_o n}, y_{k_o m}, b_{k_o i})$ یک بردار هادی (جهت دار) است. هر چه $IE(k_o)$ کم تر باشد، k_o کارامد تر خواهد بود. در صورتی که $IE(k_o) = 0$ باشد، واحد k_o کارامد است. در غیر این صورت، ناکارامد است. در صورتی که واحد k_o ناکارامد باشد، پیش بینی به شکل زیر صورت می گیرد:

$$x'_{k_o} = x_{k_0} - \delta^* x_{k_0}, \ y'_{k_o} = y_{k_o} + \delta^* y_{k_o} \ \text{ and } \ b'_{k_o} = b_{k_o} - \delta^* b_{k_o}. \quad (4)$$

نقطه پیش بینی شده $(x'_{k_0}, y'_{k_0}, b'_{k_0})$ با توجه به Ω کارامد است.

در ذیل، ما از یک نمونه ساده برای توضیح مشکلات و نقیصه های مدل(3) استفاده می کنیم. جدول 1 مجموعه داده های پنج DMU با دو ورودی(x1 و x2)، دو خروجی مطلوب(y1 و y2) و دو خروجی نامطلوب(b1و b2) را نشان می دهد.

جدول 1: مجموعه داده ها مربوط به مثال

	x_1	x_2	y_1	y_2	b_1	b_2	inefficiency
DMU1	1	3	2	8	3	2	0
DMU2	1	4	3	7	2.5	4	0
DMU3	2	6	1	6	5	35	0
DMU4	3	6	1	5	10	10	0
DMU5	1.5	3	1.5	8	3	3	0

امتیازات ناکارامدی توسط مدل(3) در آخرین ستون جدول 1 نشان داده شده اند. بر طبق امتیازات ناکارامدی در ستون آخر، همه واحد های تصمیم گیری کارامد می باشند. با این حال از DMU2 تا DMU3، پدیده تراکم اتفاق افتاده است زیرا خروجی مطلوب کاهش یافته و هر دو خروجی های نامطلوب با افزایش ورودی کاهش می یابند.

توجه: بر طبق گفته براکت و همکاران(2004)، تراکم اغلب اشاره به " شکل منحصر به فردو حادی از ناکارامدی" از نظر علم اقتصادی دارد. یک DMU تراکم را اعلام می کند اگر و تنها اگر توسط مدل های تحلیل پوششی با در نظر گرفتن تنها خروجی های مطلوب، کارامد نوع ضعیف نباشد(وی و یان 2004).با این حال، هنگام در نظر گرفتن هر دو خروجی های مطلوب و نامطلوب، حتی اگر یک DMU کارامد باشد، احتمالا حاکی از وجود تراکم است.

در دنیای واقعی، خروجی های نامطلوب نظیر آلودگی دود یا پسماند به طور اجتناب ناپذیری همراه با خروجی های مطلوب تولید می شوند. از این روی در سناریوی فوق، خروجی ها به دو مقوله مطلوب و نامطلوب تقسیم می شوند.برای خروجی های مطلوب، هر چه ارزش بیشتر باشد، عملکرد نیز بهتر است در حالی که برای خروجی های نامطلوب، هر چه ارزش کم تر باشد، عملکرد بهتر خواهد بود. از این روی مشابه با، گفته تان و ساهو(2004)، ما ابتدا اقدام به تعریف مفاهیم " تراکم قوی" در حضور خروجی های مطلوب و نامطلوب می کنیم:

تعریف 1: یک DMU_k (x_k, y_k, b_k) در صورتی دارای تراکم قوی است که کارامد باشد و یک فعالیت $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{b}) \in \Omega$ وجود دارد به طوری که $\tilde{x} = \alpha x_k$ (با $0 < \alpha < 1$)، $\tilde{y} = \beta y_k$ (با $\beta > 1$) و $\tilde{b} = \gamma b_k$ (با $0 < \gamma < 1$) باشد.

تعریف فوق به این معنی است که $\mathrm{DMU}_k \quad (x_k, y_k, b_k)$ در وضعیت تراکم قوی بوده و مستلزم این است که کاهش متناسب در همه ورودی ها می تواند منجر به افزایش همه خروجی های مطلوب و کاهش در همه خروجی های مطلوب شود. از این نظر، تعریف 1 در برخی موارد بسیار محدود کننده است. در زیر ما، مفهوم" تراکم ضعیف" را با رفع این ملزومات سختگیرانه تعریف می کنیم.

تعریف 2: $\mathrm{DMU}_k \quad (x_k, y_k, b_k)$ در صورتی دارای تراکم ضعیف است که کارامد باشد و یک فعالیتی وجود داشته باشد که از منابع کم تر در یک یا چند ورودی برای تولید محصولات بیشتر در یک یا چند خروجی مطلوب و خروجی های کم تر نامطلوب در یک یا چند خروجی نامطلوب استفاده می کند.

توجه داشته باشید که تراکم قوی به طور ضمنی اشاره به تراکم ضعیف دارد ولی عکس این صادق نیست. در یک ورودی، یک خروجی مطلوب و یک خروجی نامطلوب، تمایزی بین تراکم های قوی و ضعیف وجود ندارد.

3- رویکرد پیشنهادی

در این بخش، ما یک رویکردی را برای شناسایی وقوع تراکم پیشنهاد می کنیم. با استفاده از تئوری دوگانگی برنامه نویسی خطی، فرمول دوگانه مدل فاصله جهت دار(3) به صورت زیر توصیف می شود:

$$\text{Min} \quad b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - y_{k_0}\pi^y \qquad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad y_k\pi^y - b_k\pi^b - x_k\pi^x \le 0 \qquad k = 1, \cdots, K \qquad (5.1)$$

$$b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x + y_{k_0}\pi^y = 1 \qquad (5.2)$$

$$\pi^x \ge 0$$

$$\pi^y \ge 0$$

π^b در صورتی نامحدود است که فرض شود π^{y*} , π^{x*} و π^{b*} راه حل بهینه مدل (4) باشند.

قضیه 1: یک $\mathrm{DMU}_{k_0} \quad (x_{k_0}, y_{k_0}, b_{k_0})$ در وضعیت تراکم قوی قرار دارد اگر و تنها اگر برای حداقل یک $i \in \{1, \cdots I\}$ ، π_i^{b*} منفی است.

اثبات. " تنها اگر":

چون فرض می کنیم که DMU $_{k_0}$ $(x_{k_0}, y_{k_0}, b_{k_0})$ کارامد است، بر اساس قضیه دوگانگی برنامه نویسی خطی می توان گفت که یک راه حل بهینه $(\pi^{x*}, \pi^{y*}, \pi^{b*})$ برای مدل(4) وجود دارد به طوری که

$$b_{k_0}\pi^{*b} + x_{k_0}\pi^{*x} - y_{k_0}\pi^{*y} = 0 \tag{6}$$

چون DMU $_{k_0}$ $(x_{k_0}, y_{k_0}, b_{k_0})$ قویا متراکم است، $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{b}) \in \Omega$ وجود دارد به طوری که $\widetilde{x} = \alpha x_k$ (با $0 < \alpha < 1$)، $\widetilde{y} = \beta y_k$ (با $\beta > 1$) و $\widetilde{b} = \gamma b_k$ (با $0 < \gamma < 1$) است. بدیهی است که $\widetilde{b}\pi^{*b} + \widetilde{x}\pi^{*x} - \widetilde{y}\pi^{*y} \geq 0$ می باشد.

از معادلات 6 و7 می توان داشت:

$$(\widetilde{b} - b_{k_0})\pi^{*b} + (\widetilde{x} - x_{k_0})\pi^{*x} + (y_{k_0} - \widetilde{y})\pi^{*y} \geq 0 \tag{8}$$

چون $\widetilde{x} < x_{k_0}$ ، $y_{k_0} < \widetilde{y}$ ، $\widetilde{b} < b_{k_0}$ و $\pi^{*x} \geq 0$ ، $\pi^{*y} \geq 0$ می باشد، داریم

$$(\widetilde{x} - x_{k_0})\pi^{*x} \leq 0 \tag{9}$$

$$(y_{k_0} - \widetilde{y})\pi^{*y} \leq 0 \tag{10}$$

فرض کنید که $\pi^{*b} \geq 0$ ، آنگاه $(\widetilde{b} - b_{k_0})\pi^{*b} \leq 0$ می باشد

بر طبق قید(5.2)، داریم:

$$\pi^{*b} \neq 0, \pi^{*x} \neq 0 \text{ and } \pi^{*y} = 0. \tag{12}$$

بر طبق معادلات 9-12، داریم: $(\widetilde{b} - b_{k_0})\pi^{*b} + (\widetilde{x} - x_{k_0})\pi^{*x} + (y_{k_0} - \widetilde{y})\pi^{*y} < 0$،

که با معادله(8) تناقض دارد.

لذا، حداقل یک $i \in \{1, \cdots I\}$ وجود دارد به طوری که π_i^{b*} منفی است.

"اگر": ما   با استفاده از مغایرت آن را   اثبات می کنیم. از این روی نشان می دهیم که اگر DMU $_{k_0}$ $(x_{k_0}, y_{k_0}, b_{k_0})$ قویا متراکم باشد، یک راه حل بهینه $(\pi^{x*}, \pi^{y*}, \pi^{b*})$ از مدل(5) وجود دارد به طوری که $\pi_i^{b*} \geq 0$ for all $i \in \{1, \cdots I\}$ می باشد.

چون DMU $_{k_0}$ $(x_{k_0}, y_{k_0}, b_{k_0})$ دارای تراکم قوی است، سیستم خطی زیر

$$\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} > y_{k_o m} \qquad m = 1, \cdots, M$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} < b_{k_o i} \qquad i = 1, \cdots I$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} < x_{k_o n} \qquad n = 1, \cdots N$$

راه حل ندارد.

از این روی، ارزش بهینه مدل زیر(13) صفراست.

$$\max \ \varphi \tag{13}$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} \geq y_{k_o m} + \varphi y_{k_o m} \qquad m = 1, \cdots, M$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} \leq b_{k_o i} - \varphi b_{k_o i} \qquad i = 1, \cdots I$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} \leq x_{k_o n} - \varphi x_{k_o n} \qquad n = 1, \cdots N$$

برنامه دوگانه متناظر برای مدل(13) با معادله زیر بدست می آید:

$$\text{Min} \quad b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x - y_{k_0}\pi^y \tag{14}$$

$$\text{s.t.} \quad y_k\pi^y - b_k\pi^b - x_k\pi^x \le 0 \qquad k = 1,\cdots,K$$

$$b_{k_0}\pi^b + x_{k_0}\pi^x + y_{k_0}\pi^y = 1$$

$$\pi^x \ge 0$$

$$\pi^y \ge 0$$

$$\pi^b \ge 0$$

فرض کنید $(\pi^{x*}, \pi^{y*}, \pi^{b*})$ راه حل بهینه مدل(14) است. توجه داشته باشید که مدل 14 و 5 تنها از حیث پنجمین مجموعه از قیود متفاوت هستند. بدیهی است که $(\pi^{x*}, \pi^{y*}, \pi^{b*})$ یک راه حل ممکن برای مدل(5) است. بر طبق قضیه دوگانه، ارزش بهینه مدل(14) صفر است یعنی $b_{k_0}\pi^{*b} + x_{k_0}\pi^{*x} - y_{k_0}\pi^{*y} = 0$ است. از این روی،$(\pi^{x*}, \pi^{y*}, \pi^{b*})$ راه حل بهینه مدل(5) می باشد که در آن $\pi_i^{b*} \ge 0$ به ازای همه $i \in \{1,\cdots I\}$ است.

از قضیه 1، یک ابر صفحه موید برای $(x_{k_0}, y_{k_0}, b_{k_0})$ DMU $_{k_0}$ به طور ریاضی با $\sum_{m=1}^{M} y_{k_0 m}\pi_m^y - \sum_{i=1}^{I} b_{k_0 i}\pi_i^b - \sum_{n=1}^{N} x_{k_0 n}\pi_n^x = 0$ تعیین می شود. توجه کنید که محصول نهایی، یک ویژگی متمایز از مرز تولید است. در رسیدگی به خروجی های نامطلوب چندگانه، فرمول زیر، محصول نهایی $b_{k_0 i}$ را با توجه به $x_{k_0 n}$ ، $n = 1,\cdots N$ و $y_{k_0 m}$، $m = 1,\cdots,M$ را محاسبه می کند.

$$MR_{mi}^{k_0} = \partial y_m / \partial b_i = -\pi_m^{*y} / \pi_i^b$$

$$MR_{ni}^{k_0} = \partial x_n / \partial b_i = \pi_n^{*x} / \pi_i^b$$

از این روی، علایم منفی یک متغیر دوگانه مربوط به خروجی نامطلوب اشاره به وقوع تراکم دارد.

بر طبق قضیه 1، ما رویکرد زیر را برای شناسایی وقوع تراکم قوی پیشنهاد می کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \alpha \\
&\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} \geq y_{k_o m} + \delta y_{k_o m} && m = 1, \cdots, M \\
&\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} = b_{k_o i} - \delta b_{k_o i} && i = 1, \cdots I \\
&\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} \leq x_{k_o n} - \delta x_{k_o n} && n = 1, \cdots N \\
&b_{k_0} \pi^b + x_{k_0} \pi^x - y_{k_0} \pi^y = \delta \\
&y_k \pi^y - b_k \pi^b - x_k \pi^x \leq 0 && k = 1, \cdots, K \\
&b_{k_0} \pi^b + x_{k_0} \pi^x + y_{k_0} \pi^y = 1 \\
&\pi_i^b - \alpha \geq 0 && i = 1, \cdots I
\end{aligned}
$$

فرض کنید $(\pi^{x*}, \pi^{y*}, \pi^{b*}, \delta^*, \alpha^*)$ راه حل بهینه مدل(15) است. در صورتی که $\alpha^* < 0$ باشد، آنگاه نقطه پیش بینی شده $(x_{k_0} - \delta^* x_{k_0}, y_{k_o} + \delta^* y_{k_o}, b_{k_o} - \delta^* b_{k_o})$ از DMU k_0 دارای تراکم قوی است. اگر $\alpha^* > 0$ باشد،آنگاه نقطه پیش بینی شده $(x_{k_0} - \delta^* x_{k_0}, y_{k_o} + \delta^* y_{k_o}, b_{k_o} - \delta^* b_{k_o})$ از DMU k_0، دارای تراکم قوی نیست.

اگر $\alpha^* = 0$ باشد، برای نقطه پیش بینی شده $(x_{k_0} - \delta^* x_{k_0}, y_{k_o} + \delta^* y_{k_o}, b_{k_o} - \delta^* b_{k_o})$ از DMU k_0، برنامه نویسی زیر را حل می کنیم:

$$\text{Max} \quad \beta \tag{16}$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} \geq y_{k_o m} + \delta^* y_{k_o m} + t_m^+ \qquad m = 1, \cdots, M$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} \leq b_{k_o i} - \delta^* b_{k_o i} \qquad i = 1, \cdots I$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} \leq x_{k_o n} - \delta^* x_{k_o n} - t_n^- \qquad n = 1, \cdots N$$

$$\sum_{m=1}^{M} t_m^+ - \beta \geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{N} t_n^- - \beta \geq 0$$

$$z_k \geq 0 \qquad k = 1, \cdots, K$$

که δ^* راه حل بهینه مدل (14) است. اگر $\beta > 0$ باشد، آنگاه نقطه پیش بینی شده $(x_{k_0} - \delta^* x_{k_0}, y_{k_o} + \delta^* y_{k_o}, b_{k_o} - \delta^* b_{k_o})$ از DMU k_0 دارای تراکم ضعیف است. در غیر این صورت، دارای تراکم نیست.

در زیر، ما رویکرد پیشنهادی را با مثال ساده در جدول 1 اثبات می کنیم. از جدول 1 می توان دید که همه DMU ها کارامد می باشند. ما مدل(15) را در مجموعه داده ها استفاده کردیم . نتایج در جدول 2 نشان داده شده است. از α ، ما DMU3 و DMU4 را به صورت دارای تراکم قوی شناسایی کردیم. DMU1 و DMU2 فاقد تراکم است. برای DMU5، ما مدل(16) را حل کرده و $\beta^* = 0.5$ است. از این روی، DMU5 دارای تراکم ضعیف است.

جدول 2: مجموعه داده ها برای توضیح

	x_1	x_2	y_1	y_2	b_1	b_2	inefficiency	α	Congestion
DMU1	1	3	2	8	3	2	0	0.1	No
DMU2	1	4	3	7	2.5	4	0	0.077	No
DMU3	2	6	1	6	5	35	0	-0.021	Strong
DMU4	3	6	1	5	10	10	0	-0.216	Strong
DMU5	1.5	3	1.5	8	3	3	0	0	Weak

تراکم	ناکارامدی

توجه: از امتیاز ناکارامدی محاسبه شده با تابع فاصله جهت(3)، همه DMU ها کارامد هستند. با این حال، بدیهی است که DMU3 با DMU2 در ورودی ها و خروجی ها غالب است، به این معنی که DMU3 به اشتباه به صورت یک DMU کارامد طبقه بندی می شود. یکی از مزیت های این مقاله این است که رویکرد پیشنهادی ما قادر به تمایز و تفکیک DMU های متراکم و DMU های کارامد واقعی است. این یافته ها حاکی از آن است که تصمیم گیرنده در استفاده از تابع فاصله جهت دار برای ارزیابی کارایی در حضور خروجی های مطلوب و نامطلوب محتاطانه عمل کند.

4- مثال های گویا

در این بخش، ما از یک مثال عددی برای مقایسه بین رویکرد پیشنهادی و رویکرد های موجود در سناریوی سنتی استفاده می کنیم. بر طبق مباحث مطرح شده در بخش مقدمه، رویکرد های تراکم برای سناریوی متعارف و مرسوم تنها خروجی های مطلوب را در نظر می گیرد. برای مقایسه، ما رویکرد فیر و همکاران(1985) را توسعه دادیم و از خروجی های نامطلوب نیز با در نظر گرفتن دو مدل زیر استفاده کردیم.

$$h^* = \max \quad h \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} \geq y_{k_o m} + h y_{k_o m} \qquad m = 1, \cdots, M$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} = b_{k_o i} - h b_{k_o i} \qquad i = 1, \cdots I$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} = x_{k_o n} \qquad n = 1, \cdots N$$

$$z_k \geq 0 \qquad k = 1, \cdots, K$$

و

$$\tau^* = \max \quad \tau \tag{18}$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} \geq y_{k_o m} + \tau y_{k_o m} \qquad m = 1, \cdots, M$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} = b_{k_o i} - \tau b_{k_o i} \qquad i = 1, \cdots I$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} \leq x_{k_o n} \qquad n = 1, \cdots N$$

$$z_k \geq 0 \qquad k = 1, \cdots, K$$

اساسا، مدل(17) و (18) تنها از این نظر متفاوت می باشند که قیود برای ورودی های مدل(17) تحت حذف پذیری ضعیف می باشند با این حال ورودی های مدل (18) تحت حذف پذیری قوی هستند. مشابه با فیر و همکاران(1985)، تراکم به صورت نسبت $(1+\tau^*)/(1+h^*)$ تعریف می شود.

به طور مشابه، ما رویکرد سویوشی و سکیتانی(2009) را به مورد خروجی نامطلوب با در نظر گرفتن مدل زیر بسط می دهیم:

$$\text{Max} \quad \varepsilon \tag{19}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{m=1}^{M} y_{km}\pi_m^y - \sum_{i=1}^{I} b_{ki}\pi_i^b - \sum_{n=1}^{N} x_{kn}\pi_n^x + \sigma \le 0 \qquad k=1,\cdots,K$$

$$\sum_{m=1}^{M} y_{k_0m}\pi_m^y - \sum_{i=1}^{I} b_{k_0i}\pi_i^b - \sum_{n=1}^{N} x_{k_0n}\pi_n^x + \sigma = 0$$

$$\sum_{m=1}^{M} y_{k_0m}\pi_m^y + \sum_{i=1}^{I} b_{k_0i}\pi_i^b = 1$$

$$x_{k_0n}\pi_n^x - \varepsilon \ge 0 \qquad n=1,\cdots N$$

$$\pi_m^y \ge 0 \qquad m=1,\cdots,M$$

π_n^x نامقید: $n=1,\cdots N$

π_i^b نامقید: $i=1,\cdots I$

σ مقید

بر طبق گفته سویوشی و سکیتانی(2009)، اگر مقدار بهینه هدف مدل منفی باشد، آنگاه k0 امین DMU از تراکم گسترده رنج می برد.

به علاوه، ما رویکرد خود را با رویکرد جمعی زیر که به طور گسترده در میان مدل های DEA با خروجی های نامطلوب استفاده می شوند مقایسه می کنیم(فوکویاما و وبر 2010، باروس و همکاران 2012).

$$\text{Max} \quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}\frac{s_m^y}{y_{k_0m}} + \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\frac{s_i^b}{b_{k_0i}} + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\frac{s_n^x}{x_{k_0n}}\right) \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k y_{km} = y_{k_o m} + s_m^y \qquad m=1,\cdots,M$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k b_{ki} = b_{k_o i} - s_i^b \qquad i=1,\cdots,I$$

$$\sum_{k=1}^{K} z_k x_{kn} = x_{k_o n} - s_n^x \qquad n=1,\cdots,N$$

$$s_m^y \geq 0 \qquad m=1,\cdots,M$$

$$s_i^b \geq 0 \qquad i=1,\cdots,I$$

$$s_n^x \geq 0 \qquad n=1,\cdots,N$$

$$z_k \geq 0 \qquad k=1,\cdots,K$$

4-1 مثال عددی

در این زیر بخش، ما از مثال جدول 1 برای مقایسه رویکرد پیشنهادی با سه رویکرد اصلاح شده فوق استفاده می کنیم. جدول 3، وضعیت تراکم اندازه گیری شده با چهار رویکرد متفاوت خلاصه شده است.

جدول 3: تراکم با چهار رویکرد متفاوت

DMU	Färe et al. (1985) (Modified)	Sueyoshi and Sekitani (Modified)	Slacks-based approach	Proposed approach
DMU1	No	No	No	No
DMU2	No	No	No	No
DMU3	No	No	Weak	Strong
DMU4	Congestion	No	Weak	Strong
DMU5	No	No	Weak	Weak

فیر و همکاران(1985)(اصلاح شده)، سویوشی و سکیتانی(اصلاح شده)، رویکرد جمعی، رویکرد پیشنهادی، تراکم، قوی، ضعیف

از جدول 3، می توان مشاهده کرد که رویکرد اصلاح شده سویوشی و سکیتانی(2009)(19) قادر به شناسایی تراکم نیست. دلیل این است که قیمت های سایه برای ورودی ها و خروجی های نامطلوب، نامحدود هستند و این نشان

می دهد که نسخه اصلاح شده رویکرد سویوشی و سکیتانی(2009) برای مورد با خروجی های نامطلوب نامناسب است. نسخه اصلاح شده روش فیر و همکاران(1985) تولید یک نتیجه متفاوت از حیث تراکم از دو روش دیگر می کند. برای مثال، رویکرد اصلاح شده فیر و همکاران(1985) تنها، تراکم را در چهارمین DMU شناسایی می کند. بر عکس، دو رویکرد دیگر دارای یک نتیجه یکسان مبتنی بر این هستند که DMU4،DMU3 و DMU5 تحت تراکم قرار دارند و این نشان می دهد که رویکرد جمعی و روش پیشنهادی ما حساس تر است.

بر طبق امتیازات ناکارامدی در آخرین ستون جدول 1، همه DMU ها با تابع فاصله ای جهت دار کارامد می باشند(3). هر دو رویکرد جمعی و رویکرد پیشنهادی ما، بین DMU متراکم و DMU های کارامد واقعی تفاوت قائل می شوند. با این حال، روش پیشنهادی در این مطالعه نسبت به رویکرد جمعی دیگر که قابلیت تفکیک و تمایز بین تراکم قوی و ضعیف را دارد، مزیت دارد. معمولا رویکرد جمعی، DMU را به صورت تراکم ضعیف شناسایی می کند اگر DMU تحت تراکم باشد. دلیل این است که حداقل $s_n^x \quad (n=1,\cdots,N)$ صفر باشد.

4-2 مثال تجربی

در این بخش،، برای ارایه مثالی در خصوص کاربرد روش پیشنهادی، ما مجموعه داده تجربی متشکل از 20 نیروگاه برق را از مطالعه سویوشی و گوتو(2012الف) تجزیه تحلیل می کنیم. مجموعه داده ها متشکل از دو ورودی است(ظرفیت پلاک اسم و مصرف سوخت)، یک خروجی مطلوب(تولید خالص) و سه خروجی نامطلوب(SO2,NOx,CO2). جدول 4 مجموعه داده های ورودی و خروجی را برای 20 نیروگاه برق نشان می دهد.

جدول 4: مجموعه داده نیروگاه های برق امریکا

Plant	Nameplate capacity	Fuel consumption	Net generation	SO_2	NO_x	CO_2
	MW	1000 MMBtu	GWh	Ton	Ton	1000 Ton
1	2842	122482	14087	37109.314	8440.868	11424.864
2	138	3855	261	3925.846	795.335	365.722
3	1417	52698	5207	5027.653	5373.364	5695.994
4	1969	51648	4688	12861.358	3526.372	5278.828
5	721	51927	4465	11720.507	4589.779	5265.576
6	538	32907	3026	5644.99	3193.01	3496.782
7	110	6510	592	2679.396	1273.507	766.309
8	257	20258	1836	1308.302	3607.039	2164.309
9	349	27868	2656	1948.292	4355.391	2892.501

نیروگاه، ظرفیت پلاک اسم، مصرف سوخت، تولید خالص،						
10	1129	74881	7236	7955.926	9211.297	8441.262
11	1207	13523	1521	2.933	103.511	580.963
12	85	61	4	0.093	0.91	3.162
13	559	7929	688	642.152	1010.558	580.239
14	2390	146042	14620	7156.835	5903.727	15588.088
15	1429	70867	7097	20576.961	4401.534	7687.792
16	574	5589	722	1.65	30.376	326.848
17	1010	75739	6840	18012.943	14346.412	8509.161
18	138	64	2	0.02	19.904	3.849
19	183	676	45	0.199	233.665	39.33
20	752	1559	132	0.425	191.427	84.14

ما از مدل(15) برای ارزیابی کارایی و شناسایی تراکم 20 نیروگاه استفاده می کنیم. نتایج امتیازات ناکارامدی (δ^*)در دومین ستون جدول 5 گزارش می شود. همان طور که در جدول 5 نشان داده شده است، 15 نیروگاه کارامد می باشند. در جدول 5، تراکم را می توان با α شناسایی کرد که در سومین ستون جدول 5 نشان داده شده است. نتایج نشان می دهد که تنها پنج نیروگاه از 15 نیروگاه کارامد، واقعا کارامد هستند و سایر 10 نیروگاه دارای تراکم قوی هستند. برای پنج نیروگاه ناکارامد، ما بر طبق معادله (4)پیش بینی را انجام می دهیم و همه نقاط پیش بینی شده به صورت دارای تراکم قوی شناسایی می شوند.

مورد فوق نشان می دهد که استفاده از تابع فاصله ای جهت دار در تحلیل کارامدی واقعی در حضور خروجی های نامطلوب، مستلزم تحقیق و بررسی دقیق است. ما از طریق رویکرد پیشنهادی خود، بهتر قادر به تفکیک DMU های متراکم از DMU های واقعا کارامد می باشیم.

جدول 5: امتیازات ناکارامدی و وضعیت تراکم

Plant	δ^*	α	Congestion
1	0	0.2362745E-05	No
2	0	-0.1060751E-03	Strong
3	0.0037	-0.5917792E-04	Strong

4	0.078	-0.9468108E-04	Strong
5	0	-0.4584385E-05	Strong
6	0.0315	-0.4205287E-04	Strong
7	0	-0.3299549E-04	Strong
8	0	-0.1266256E-04	Strong
9	0	0.1957027E-04	No
10	0	-0.1894897E-04	Strong
11	0	0.7273711E-03	No
12	0.2948	-0.1614217E-01	Strong
13	0.0292	-0.3471911E-03	Strong
14	0	0.1454874E-04	No
15	0	-0.6217529E-05	Strong
16	0	0.1214732E-02	No
17	0	-0.2381698E-05	Strong
18	0	-5.451708	Strong
19	0	-0.2034579E-02	Strong
20	0	-4.479254	Strong

کارخانه، تراکم،قوی

5-نتیجه گیری

تراکم یک پدیده اقتصادی بسیار گسترده و رایج است. بسیاری از رویکرد های قبلی برای شناسایی تراکم در تحلیل غیر پارامتری، تنها خروجی های مطلوب را در نظر می گیرند. در فرایند تولید واقعی، خروجی های نامطلوب معمولا به طور مشترک با خروجی های مطلوب تولید می شوند. چانگ و همکاران(1997)، یک مدل تابع فاصله ای جهت دار را توسعه دادند که خروجی های مطلوب را افزایش داده و ورودی ها و خروجی های نامطلوب را در امتداد مسیر بردار هادی کاهش می دهد. جدا از شرایط سنتی و متعارف که تنها از خروجی های مطلوب استفاده می کنند، پی برده شد که حتی اگر یک واحد تصمیم گیری DMU با تابع فاصله ای جهت دار کارامد باشد، احتمال بروز تراکم حتی با در نظر گرفتن هر دو خروجی های مطلوب و نامطلوب وجود خواهد داشت. این مقاله یک تلاش جدید برای پیشنهاد روشی به منظور اندازه گیری تراکم در حضور هم زمان خروجی های مطلوب و نامطلوب می باشد. از طریق رویکرد پیشنهادی، می توان بین DMU های متراکم و DMU های کارامد واقعی تمایز قائل شد که همگی بر طبق امتیازات محاسبه شده با تابع فاصله ای جهت دار کارامد می باشند. به علاوه، ما رویکرد پیشنهادی را با سه رویکرد معرف موجود با یک مثال عددی مقایسه میکینم.نتایج نشان می دهد که رویکرد پیشنهادی قادر به شناسایی تراکم قوی و ضعیف در حضور خروجی های مطلوب و نامطلوب است.

برای مطالعات آینده، شیوه توسعه مدلی جدید به منظور ارزیابی کارایی آن ها برای DMU متراکم ، یک مسئله پژوهشی مهم خواهد بود. به علاوه، تراکم و   بازدهی به مقیاس مقیاس ارتباط نزدیکی با یک دیگر دارند(سویوشی و سکیتانی 2009). به منظور بررسی مفاهیم مقیاس اقتصادی برای رسیدگی به خروجی های نامطلوب، توشیوکی و گوتو(2012ب، 2013)، مفهوم ضایعات به مقیاس را پیشنهادکردند. از این روی یک ارتباط نظری بین تراکم، بازدهی نسبت به مقیاس و ضایعات به مقیاس، یک موضوع جالب برای تحقیقات آینده است. مشاهده شد که همه متغیر ها در این مقاله فرضا پیوسته و اختیاری می باشند. شیوه مرتب سازی متغیر های غیر اختیاری و متغیر های صحیح، یک موضوع دیگر برای مطالعات آینده است.