بیمه اتکائی و استراتژی سرمایه گذاری بهینه برای بیمه گر تحت نرخ بهره و ریسک تورم

چکیده

در این مقاله، ما مشکل بیمه اتکائی و مشکل سرمایه گذاری بهینه را برای بیمه گر بررسی می کنیم، که فرآیند مازاد توسط یک حرکت براونین تقریب زده می شود. بیمه اتکائی نسبی مانع ریسک بیمه می شود. ریسک نرخ بهره و ریسک تورم بررسی می شوند. فرض می کنیم که نرخ بهره اسمی لحظه ای از فرایند اورنستاین-اولنبکه پیروی می کند و شاخص تورم به وسیله ی معادله فیشر عمومی تعریف می شود. برای تکمیل بازار، حفاظت تورم اوراق بهادار خزانه داری (TIPS) در بازار گنجانده شده است. بازار مالی شامل نقدی، اوراق بها دار کوپن صفر، TIPS و سهام می باشد.

ما برنامه نویسی پویا تصادفی برای نتیجه گیری فرم های بسته از بیمه اتکایی و استراتژی های سرمایه گذاری بهینه و همچنین عملکرد استفاده مطلوب تحت حداکثر کاربرد مخالفت ریسک نسبی ثابت   (CRRA) را اجرا می کنیم. تجزیه و تحلیل حساسیت ارائه شده است تا رفتار اقتصادی استراتژی و سودمندی بهینه را نشان دهد.

کلید واژه ها: استراتژی بهینه بیمه اتکایی نسبی، استراتژی سرمایه گذاری بهینه، کاربردCRRA ، برنامه ریزی پویا تصادفی شاخص تورم تصادفی، نرخ بهره تصادفی

نکات کلیدی

- ایجاد مدل ریسک با نرخ بهره تصادفی، شاخص تورم، اوراق قرضه و TIPS.
- بررسی مشکل بیمه اتکائی و سرمایه گذاری بهینه تحت حداکثر استفاده از CRRA.
- شکل های بسته ای از استفاده بهینه، استراتژی های بیمه اتکائی و سرمایه گذاری را نتیجه گیری کنید.
- تجزیه و تحلیلی حساسیت را برای بیان رفتار مدل ریسک ارائه دهید.

1. مقدمه

استراتژی سرمایه گذاری بهینه برای بیمه گر به تازگی موضوع مهمی شده است. بیمه گر می تواند در بازار مالی شرکت کند تا از ریسک جلوگیری کند. اخیرا، پیشینه تحقیق زیادی حداکثر استفاده از ارزش ترمینال یا به حداقل رساندن احتمال ضرر وزیان برای بیمه گر بررسی کرده اند براون (راجع براون 1995) بررسی راه حل صریح برای شرکتی جهت به حداکثر رساندن نماد استفاده از ثروت ترمینال و به حداقل رساندن احتمال خرابی با فرآیند مازاد آن توسط مدل ریسک لاندبرگ را ارائه کرده است. برای اندازه ادعای مختلف بیمه گر، استراتژی بهینه توسط معادله بلمن در هیپ و پلام (2000) برای به حداقل رساندن احتمال خرابی ارائه شده است. وانگ، شیا و ژانگ (مراجعه کنید به وانگ و همکاران، 2007) بطور موثر از روش مارتینال برای بررسی انخاب بهینه نمونه کارها برای بیمه گر تحت معیار واریانس متوسط و همچنین افزایش دادن کاربرد اجتناب از ریسک مطلق ثابت مورد انتظار (CARA)استفاده می کند. به عنوان مثال خوانندگان به یانگ و ژانگ (2005)، وانگ (2007)، لیو و یانگ (2004)، بای و گو (2008) و منابع در آنجا مراجعه می کنند.

علاوه بر ریسک بازار، بیمه گر نیز ریسک بیمه را بررسی می کند. ریسک بیمه نمی تواند توسط سرمایه گذاری منحصربه فرد در اوراق قرضه و دارایی های دیگر در بازار اجتانب شود. به هرحال، کسب و کار بیمه اتکایی شیوه ای برای بیمه گر فراهم می کند تا از این ریسک جلوگیری کند، و همین طور اخیرا نیز در مورد نگرانی به آن پرداخته نشده است.

کسب و کار بیمه اتکایی در شکل های متفاوت ظاهر می شود. در اصل، بیمه اتکایی مشارکتی و سرمایه گذاری توسط پرامیسلو و یانگ (راجع پرامیسلو و یانگ 2005) بررسی می شوند. بیمه اتکایی نسبی در باروئل (2005) در دسترس بود که نویسنده فاصله مورد انتظار دو طرفه را به حداقل می رساند ارزش ترمینال بیش از یک ثابت مثبت و بطور موفقیت مشکل مربوط به میانگین - واریانس را حل کرده است.

زنگ و لی (راجع زنگ و لی، 2011) اساسا مرز کارآمد میانگین واریانس را از مدل پخش با دارایی های متعدد خطرناکی در مورد بیمه اتکایی نسبی بدست می آورد. قیمت سهام در مدل های فوق به طور کلی یک حرکت

هندسی براونی را دنبال می کند و قیمت بازار ریسک همبستگی با سهام ثابت است. اما در بازار واقعی قیمت سهام ممکن است ویژگی های دیگری، به عنوان مثال، نوسان تصادفی داشته باشد. لیانگ، یوئن و گو (راجع لیانگ و همکاران، 2011) نرخ لحظه ای سهام توسط روند اورنشتین-اوهلنبک مشخص شد که از بیمه اتکایی و استراتژی سرمایه گذاری بهینه حاصل شده است.

مدل کشش ثابت واریانس (CEV) توسط گو و همکاران (2012) ثابت شد که در آن بیمه گر می تواند بیمه اتکایی مازاد خسارت را بخرد. در باروئل و بلاتر(2011) ، هر دو مازاد بیمه گر و شاخص سهام در بازار صریحا به دنبال روند لوی و سرمایه گذاری بهینه و سیاست های بیمه اتکایی هستند. علاوه بر این، استراتژی سرمایه گذاری بهینه با زیبایی توسط بادوئی و فرناندز حل می شود (بادوئی و فرناندز، 2013) زمانی که نرخ فوری و نوسانات با یک عامل تصادفی مشترک ارتباط داشتند.

بر اساس استراتژی سرمایه گذاری و بیمه اتکایی، بیمه گر می تواند بطور موفقیت آمیزی از خطر جلوگیری کند. به هرحال، زمان سرمایه گذاری ممکن است مدت طولانی برای بیمه گر باشد، بنابراین طبیعی است که ریسک نرخ بهره بررسی شود. تا کنون، پیشینه تحقیق کمی برای بیمه گر تحت نرخ بهره تصادفی در دسترس است. الیوت و سیو (راجع الیوت و سیو، 2011) استفاده می کند که رویکرد نظری بازی برای پیدا کردن بهترین تخصیص در بازار استفاده می شود زمانی که نرخ بهره با یک مدل سوئیچینگ رژیم داده شد. در واقع، بیشتر کار سرمایه گذاری تحت تمرکز بهره تصادفی بر انتخاب نمونه کارها تمرکز می کند.

در مورد نرخ بهره تصادفی، اوراق قرضه صفر کوپن، ارائه یک بازده ثابت از 1 دلار در زمان موعد، در بازار صادر می شود تا از خطر نرخ بهره جلوگیری کند. با کمک اوراق قرضه کوپن صفر، ما می توانیم یک بازار کامل را ایجاد کنیم. باژوکس-بسناینو و پورتریت (راجع باژوکس-بسناینو و پورتریت 1998) برای اولین بار مشکل انتخاب نمونه کارها را حل کرد وقتی که نرخ بهره لحظه ای تصادفی بود. آنها هسته قیمت گذاری را معرفی کردند و مرز کارآمد میانگین -واریانس تحت تعمیم مدل واسجک مشتق شدند. باژوکس – بسناینو، جردن و پورتریت (راجع باژوکس – بسناینو و همکاران، 2003) بررسی می شود زمانی که نرخ بهره پس از فرآیند اورنستاین-اولنبکه و استراتژی سرمایه

گذاری بهینه برای به حداکثر رساندن CRRA و کاربرد اجتناب از ریسک مطلق هذلولی (HARA) برای سرمایه گذاران با روش های مارتینال را دریافت کرد.

مشکل میانگین- واریانس با کاکس-انگرلس-راس (CIR) و مدل گسترده نرخ بهره تصادفی توسط فرلاند و ویتر مورد بررسی قرار گرفت (راجع فرلاند و ویتر 2010). علاوه بر این، بولیر، هوانگ و تایلارد (راجع بولیر و همکاران، 2001)، جوزا-فامبلیدا و رینکون-زاپاترو (راجع. جوزا-فامبلیدا و رینکون-زاپاترو 2010) مشکل سرمایه گذاری بهینه را در نرخ بهره تصادفی در سهم تعریف شده (DC) و برنامه های حقوق بازنشستگی مزایای تعریف شده را (DB) به ترتیب حل کردند.

همچنین، ریسک تورم عامل مهمی در سرمایه گذاری دراز مدت است. برای جلوگیری از ریسک تورم، در مورد تخصیص دارایی مطلوب با تورم، اوراق بهادار محافظت شده با تورم خزانه داری (TIPS) مورد نیاز است. در عمل، TIPSهای بسیاری وجود دارد که در آن مردم اغلب از اوراق قرضه صفر کوپن با شاخص تورم در بازار استفاده می کنند.

مدل نرخ تورم اغلب شامل نرخ بهره اسمی، نرخ بهره واقعی و شاخص تورم است. شاخص تورم نیز یک عامل مهمی برای مشخص کردن ارتباط بین بازار اسمی و بازار واقعی است. معروف ترین معادله بین آنها معادله مشهور فیشر است. جارو و ییلدیریم (راجع جارو و ییلدیریم، 2003) موفق به ایجاد مدل جارو- ییلدیریم (JY) برای مشخص نمودن شاخص تورم، نرخ بهره اسمی آتی و نرخ بهره واقعی آتی شد.

برنا و ژیا (راجع برنا و ژیا 2002)، شاخص تورم را در یک چارچوب متفاوت مدل سازی کرده و استراتژی های سرمایه گذاری بهینه را تحت فشار قرار دادند. علاوه بر این، ژانگ، کورن و اوالد (راجع ژانگ و همکاران، 2007) معادله فیشر را تحت خطر غیر مستقیم اندازه گیری و استفاده از روش مارینگال برای به دست آوردن تخصیص بهینه است. بعدها، هان و هانگ (مراجعه کنید به هان و هانگ، 2012) ابتدا ریسک تورمی و نرخ بهره را در یک مدل صندوق بازنشستگی DC معرفی کردند.

متأسفانه، تا آنجا که ما نگران هستیم، هیچ یک از سوابق بیمه گر در مورد دو خطای مهم بازار در همان زمان مورد توجه نیست. اما هنگامی که ما نگران بیمه اتکایی و استراتژی های سرمایه گذاری بهینه برای مدت زمان طولانی هستیم، هر دو ریسک نرخ بهره و تورم باید شامل شود.

در این مقاله، ما بر بررسی مشکالت بیمه اتکایی و سرمایه گذاری بهینه برای یک بیمه گر تحت ریسک نرخ بهره و تورم تمرکز خواهیم کرد. هدف بیمه گر به حداکثر رساندن استفاده CRRA مورد انتظار از ثروت واقعی ترمینال است، فرض می کنیم که نرخ بهره اسمی از فرآیند اورنستاین - اولنبکه پیروی می کند، ارتباط بین نرخ بهره واقعی، نرخ بهره اسمی و شاخص تورم توسط معادله مشهور فیشر بدست می آید. برای تکمیل بازار و جلوگیری از خطر بازار، اوراق قرضه صفر کوپن، TIPSو سهام نیز در بازار مالی گنجانده شده است. علاوه بر این، ما همچنین فرض می کنیم که بیمه اتکایی نسبی اجازه داده می شود. با استفاده از روش برنامه ریزی پویا تصادفی، ابتدا معادلات همیلتون-ژاکوبی-بلمان (HJB)را برای مسئله به ارمغان می آوریم و سپس آن را با استفاده از تکنیک تغییر متغیر حل می کنیم، در نهایت فرم های بسته ای از استراتژی های بیمه اتکایی و سرمایه گذاری بهینه را در مشکل بهینه سازی پویا حل می کنیم.

به هر حال، از زمان وجود بیمه، ما یک فرایند ثروت خود تامین مالی را دریافت نخواهیم کرد و این مشکل را بسیار دشوار می سازد.

برای رسیدگی به این وضعیت، فرآیند کمکی معرفی خواهد شد تا بازار خود را نیز تامین مالی کند و فرآیند کمکی به حل مشکالت بیمه اتکایی و سرمایه گذاری بهینه برای بیمه گران می کند.
این مقاله به شرح ذیل سازماندهی می شود. مدل بیمه اتکایی نسبی با شاخص نرخ تورم اسمی تصادفی و شاخص تورم در بخش 2 ارائه شده است و همچنین پویایی اوراق قرضه صفر کوپن و TIPS نیز ارائه شده است. بخش 3 یک مشکل کمکی را معرفی می کند و استراتژی های بیمه اتکایی و سرمایه گذاری بهینه را با برنامه ریزی های پویا تصادفی به ارمغان می آورد. بخش 4 تجزیه و تحلیل حساسیت را برای توضیح رفتار مدل ما فراهم می کند. بخش 5 نتیجه گیری است

2. مدل ریسک

در این بخش، ما یک بازار مالی برای یک بیمه گر را با خطرات تورم و نرخ بهره به دست می آوریم(Ω ،، F، {Ft} [0 ،t∈ ،T] (Pیک فضای احتمالی کامل فیلتر شده است، که Ft مجموعه ای از اطلاعات در بازار تا زمان t است. [0, T] افق زمانی ثابت است. کلیه فرایند های زیر با {Ft , t ∈ [0, T]} فرض می شوند.

2.1 بازار

ما یک بیمه گر را بررسی می کنیم که فرآیند مازاد آن توسط مدل سنتی لوندبرگ مدل می شود.

$$dX(t) = c\,dt - d\left\{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\right\}$$

که (c) نرخ حق بیمه بیمه گر، Yi ادعای i ام است، تعداد ادعاهایی تا زمان t توسط روند پواسون همگن Nt با شدت λ< 0 مشخص می شود و { N = {Nt مستقل از .{Yi} است. تمام ادعاهای Yi, i = 1, 2, 3, . . . فرض می شود تا مستقل باشد و (i.i.d.) بطور یکسان با (i.i.d) با E [Yi] = μ1 و E [Y2i] = μ2 توزیع شود. برای جلوگیری از ورشکستگی بیمه گر بلافاصله c > λμ1مورد نیاز است. صرفا، ما c = λμ1 (1 + η)،

با توجه به اصل ارزش مورد انتظار (به عنوان مثال، کاس و همکاران، 2009) تنظیم می کنیم که η > 0 بار ایمنی است. علاوه بر این، بیمه اتکایی مجاز است و ما بیمه اتکایی نسبی را در اینجا بررسی می کنیم.

نسبت بیمه اتکایی دلالت بر a(t) دارد، بدین معنا که 100 (1(a (t)-٪ (a (t) ≥ 0) ریسک بیمه برای بیمه گراتکایی t تقسیم می شود. هنگامی که ادعای ith Yi رخ می دهد، بیمه گر فقط یک Yi (t) ایفا می کند در حالیکه بیمه گر اتکایی بقیه را پرداخت می کند. به هر حال، بر اساس اصل ارزش انتظاری، بیمه گر باید حق بیمه

را با نرخ (1 (0 <θ) ((1 - a (t)) λμ1 (θ + به بیمه گر مجددا پرداخت کند. به طور کلی، θ> η، در غیر این صورت، باید داوری شود.

بیمه گر می تواند مانع ریسک بیمه نامه خود با استراتژی بیمه اتکایی a(t) شود. اگر (t) کوچک باشد، بیمه گر ریسک کمی از بیمه توسط خود می کند و بیشترین ریسک را با بیمه گر اتکایی تقسیم می کند. a (t)> 1 دلالت بر تجارت بیمه اتکایی جدید از بازار بیمه دارد. در این حالت، فرآیند مازاد X (t) دارای فرم زیر است:

$$\mathrm{d}X(t) = \lambda\mu_1[a(t)(1+\theta) - (\theta - \eta)]\mathrm{d}t - a(t)\mathrm{d}\left\{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right\}. \qquad (2.1)$$

به دنبال فرایند مشابه در گراندل(1991) ، لیانگ و هوانگ (2011) و لیانگ و سان (2011)، فرایند فوق می تواند توسط فرایند زیر تقریبی باشد:

$$\mathrm{d}X(t) = \lambda\mu_1(\eta - \theta)\mathrm{d}t + \lambda\mu_1\theta a(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\lambda\mu_2}a(t)\mathrm{d}W_0(t), \quad (2.2)$$

که W0 (t) حرکت براونین استاندارد بر روی (Ω, F , {Ft } t∈ [0,T], P) است.

در بازار، ریسک نرخ بهره و تورم در نظر گرفته شده است. برای ساده سازی مدل، ما فرض می کنیم که نرخ اسمی لحظه ای rn (t)و شاخص تورم I (t) فرآیندهای تصادفی هستند در حالی که نرخ واقعی لحظه ای rr (t)یک تابع قطعی از t است. این نرخ اسمی تصادفی rn (t) معکوس میانگین است و توسط معادله زیر اورنستاین-اولنبک ارائه می شود:

$$\mathrm{d}r_n(t) = a(b - r_n(t))\mathrm{d}t - \sigma_{r_n}\mathrm{d}W_{r_n}(t),$$

کهa ، b، σrn مثبت ثابت هستند و Wrn (t) یک حرکت استاندارد براونی است و مستقل از W0 (t) است. معادله اصلی فیشر تنها روابط در میان نرخ بهره واقعی، نرخ بهره اسمی و تورم ریسک در مورد زمان گسسته را توصیف می کند. ما مدل زمان مداوم از شاخص تورم براساس معادله فیشر توسعه یافته توسط ژانگ (راجع ژانگ و همکاران، 2007) فرموله می کنیم که به شرح زیر است:

$$
\begin{cases} r_n(t) - r_r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \widetilde{\mathbf{E}}[i(t, t + \Delta t) | \mathcal{F}_t], \\ i(t, t + \Delta t) = \frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{I(t)}, \end{cases} \tag{2.3}
$$

که $\widetilde{\mathbf{E}}$ انتظاراتی با توجه به ارزیابی خنثی $\widetilde{P}.$ می باشد

$i(t, t+1t)$ دلالت بر نرخ تورم در افق زمانی $[t, t+\Delta t]$, نشان می دهد و شاخص تورم تصادفی I (t) به شرح زیر است:

معادله دیفرانسیل تصادفی:

$$
\frac{\mathrm{d}I(t)}{I(t)} = (r_n(t) - r_r(t))\mathrm{d}t + \sigma_{I_1} \mathrm{d}\widetilde{W}_{r_n}(t) + \sigma_{I_2} \mathrm{d}\widetilde{W}_I(t), \tag{2.4}
$$

که $\widetilde{W}_{r_n}(t)$ and $\widetilde{W}_I(t)$دو حرکات استاندارد براونیان با توجه به ارزیابی خنثی ریسک $\widetilde{P}.$می باشد.

فرض کنید که ریسک قیمت بازار WI (t) ، λI است، و سپس توسط قضیه گورسنف متوجه شدیم که شاخص تورم تصادفی I (t) تحت اندازه گیری اولیه P می تواند به شرح ذیل تعریف شود

$$
\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I(t)}{I(t)} &= (r_n(t) - r_r(t))\mathrm{d}t + \sigma_{I_1}[\lambda_{r_n}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_{r_n}(t)] \\ &\quad + \sigma_{I_2}[\lambda_I \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_I(t)]. \end{aligned} \tag{2.5}
$$

قیمت دارایی بدون ریسک S0 (t) با توجه به معادله 2.6 حاصل می شود:

$$
\mathrm{d}S_0(t) = S_0(t) r_n(t) \mathrm{d}t, \quad S_0(0) = 1. \tag{2.6}
$$

برای تکمیل بازار، اوراق قرضه کوپن صفر در بازار برای جلوگیری از ریسک نرخ بهره اسمی صادر می شود. اوراق قرضه کوپن صفر Bn(t, T) قرارداد در زمان t با پرداخت نهایی 1 دلار در موعد T است، و فرض کنیم که Bn(t, T) معادله دیفرانسیل نسبی زیر را برآورد می کند:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_n(t,T)}{\partial t} + [a(b-r_n) + \lambda_{r_n}\sigma_{r_n}]\frac{\partial B_n(t,T)}{\partial r_n} \\ \quad + \frac{1}{2}\sigma_{r_n}^2 \frac{\partial^2 B_n(t,T)}{\partial r_n^2} = r_n B(t,T), \\ B(T,T) = 1, \end{cases} \tag{2.7}$$

که λrn قیمت بازار ریسک در Wrn (t) است. سپس Bn(t, T) فرم بسته زیر را دارد:

$$B_n(t,T) = \exp[r_n(t)C(t,T) - A(t,T)], \tag{2.8}$$

که

$$C(t,T) = \frac{e^{-a(T-t)}-1}{a},\ A(t,T) = -\int_t^T [(ab+\lambda_{r_n}\sigma_{r_n})C(s,T) + \frac{1}{2}\sigma_{r_n}^2 C(s,T)^2]\mathrm{d}s.$$

علاوه بر این، Bn(t, T)همچنین معادله دیفرانسیل تصادفی پسرو (BSDE) را براورد می کند

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}B_n(t,T)}{B_n(t,T)} = r_n(t)\mathrm{d}t + \sigma_{B_1}(T-t)[\lambda_{r_n}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W_{r_n}(t)], \\ B_n(T,T) = 1, \end{cases} \tag{2.9}$$

که $\sigma_{B_1}(t) = \frac{1-e^{-at}}{a}\sigma_{r_n}$

ما می توانیم در دارایی B(t, T) با فروش B(t − dt, T) در t − dt و خرید B(t, T) در زمان T سرمایه گذاری کنیم. بنابراین،   ما موعد اوراق قرضه کوپن صفر در تغییرات در طول زمان سرمایه گذاری می کنیم. به هر حال، همانطور که در بولیر، هوانگ و تایلارد (راجع بولیر و همکاران 2001) بیان شده است. ممکن است اوراق قرضه صفر کوپنی با هر موعد t> 0 در بازار وجود نداشته باشد، بنابراین ما نیاز به یک اوراق قرضه رول با یک بلوغ ثابت K1 داریم. موعد اوراق BK1 (t) به شرح ذیل است:

$$\frac{dB_{K_1}(t)}{B_{K_1}(t)} = r_n(t)dt + \sigma_{B_1}(K_1)[\lambda_{r_n}dt + dW_{r_n}(t)]. \tag{2.10}$$

رابطه بین BK1 و Bn(t, T) به شرح ذیل است:

$$\frac{dB_n(t,T)}{B_n(t,T)} = \left(1 - \frac{\sigma_{B_1}(T-t)}{\sigma_{B_1}(K_1)}\right)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \frac{\sigma_{B_1}(T-t)}{\sigma_{B_1}(K_1)}\frac{dB_{K_1}(t)}{B_{K_1}(t)}. \tag{2.11}$$

ما متوجه شدیم که مدل شاخص تورم تصادفی در این مقاله یک نمونه خاص از مدل JY در جارو و یلدریم (2003)می باشد زمانی که نرخ بهره اسمی یک روند اورنستاین-اولنبکه و نرخ بهره واقعی غیر تصادفی است. برای کاهش ریسک تورم، TIPSدر بازار موجود است. ما TIPS خاص را به نام شاخص اوراق قرضه کوپن P(t, T) بررسی می کنیم که پول واقعی از $ 1 یعنی I(t) در موعد T ارائه می شود. با استفاده از نظریه کلی قیمت گذاری از مشتقات، می دانیم که اوراق قرضه(P(t, T برآورد می کند

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + \dfrac{P}{\partial r_n}[a(b-r_n) + \lambda_{r_n}\sigma_{r_n}] + P_I I(r_n - r_r) \\ \quad + \dfrac{1}{2}P_{r_n r_n}\sigma_{r_n}^2 + \dfrac{1}{2}P_{II}I^2(\sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2) - P_{Ir_n}I\sigma_{r_n}\sigma_{I_1} = r_n P, \\ P(T,T) = I(T). \end{cases} \tag{2.12}$$

شکل بسته P(t, T) توسط معادله 2.13 ارائه شده است

$$P(t,T) = I(t)\exp\left[-\int_t^T r_r(s)ds\right]. \tag{2.13}$$

علاوه بر این، P(t, T) ، BSDE زیر را برآورده می کند:

$$\begin{cases} \dfrac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r_n(t)dt + \sigma_{I_1}[\lambda_{r_n}dt + dW_{r_n}(t)] \\ \qquad +\sigma_{I_2}[\lambda_I dt + dW_I(t)], \\ P(T,T) = 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

ما همچنین اوراق قرضه شاخص رول PK2 (t) را با موعد ثابت K2 برآرده می شود

$$\frac{dP_{K_2}(t)}{P_{K_2}(t)} = r_n(t)dt + \sigma_{I_1}[\lambda_{r_n}dt + dW_{r_n}(t)] + \sigma_{I_2}[\lambda_I dt + dW_I(t)]. \tag{2.15}$$

رابطه بین PK2 (t) و P(t, T) به شرح ذیل است:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \frac{dP_{K_2}(t)}{P_{K_2}(t)}. \tag{2.16}$$

آسان است تا متوجه شوید که دیفرانسیل TIPS P(t, T) با موعدT همبستگی ندارد. علاوه بر این، سهام در بازار وجود دارد، و ما این را قبول داریم که قیمت سهام پیرو معادله دیفرانسیل تصادفی زیر است

$$\frac{dS_1(t)}{S_1(t)} = r_n(t)dt + \sigma_{S_1}(\lambda_{r_n}dt + dW_{r_n}(t)) + \sigma_{S_2}(\lambda_I dt + dW_I(t)) + \sigma_{S_3}(\lambda_S dt + dW_S(t)), \tag{2.17}$$

که λS قیمت بازار ریسک استاندارد حرکت براونیان، WS(t) on (Ω, F , {Ft } t∈ [0,T] , P), و استاندارد حرکات براونین {W0 (t)}، {Wrn (t)}، {WI (t)}و {WS (t)} مستقل هستند.

بنابراین، در بازار فوق، دارایی X (t) بیمه گر باید SDEزیر را برآورده کند:

$$
\begin{aligned}
dX(t) = {} & \lambda\mu_1(\eta - \theta)dt + \lambda\mu_1\theta a(t)dt + \sqrt{\lambda\mu_2}a(t)dW_0(t) \\
& + \theta_0(t)\frac{dS_0(t)}{S_0(t)} + \theta_B(t)\frac{dB_{K_1}(t)}{B_{K_1}(t)} + \theta_P(t)\frac{dP_{K_2}(t)}{P_{K_2}(t)} \\
& + \theta_S(t)\frac{dS_1(t)}{S_1(t)},
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

که θ0 (t) ، θB (t)، θP (t)، θS (t)پولی است که در پول نقد اوراق قرضه کوپن صفر، TIPSو سهام به ترتیب سرمایه گذاری شده است. ثروت مدل ما X (t) = θ0 (t) + θB (t) + θP (t) + θS (t) وu (t)

(a (t)، θB (t)، θP (t)، θS (t)) T استراتژی نامیده می شود. u(t) ترکیبی از استراتژی بیمه اتکایی و استراتژی سرمایه گذاری است.

ما میگوییم u (t) یک استراتژی قابل قبول است اگر u (t) با فیلتراسیون سازگار باشد $F = \{Ft\} t\in[0,T]$ و استراتژی بیمه اتکایی a (t) در u (t) کمتر از صفر نیست. علاوه بر این، روند ثروت X (t) مربوط به u (t) باید X (t) ≥ 0.را برآورده کند. جایگزینی (2.6)، (2.10)، (2.15) و (2.17)به معادله آخر، می توانیم X (t) را به شکل خلاصه زیر بازنویسی کنیم:

$$
\Lambda \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\lambda\mu_1\theta}{\sqrt{\lambda\mu_2}} \\ \lambda_{r_n} \\ \lambda_I \\ \lambda_S \end{pmatrix}, \quad \sigma \triangleq \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda\mu_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{B_1}(K_1) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{I_1} & \sigma_{I_2} & 0 \\ 0 & \sigma_{S_1} & \sigma_{S_2} & \sigma_{S_3} \end{pmatrix},
$$

$$
dW(t) \triangleq \begin{pmatrix} dW_0(t) \\ dW_{r_n}(t) \\ dW_I(t) \\ dW_S(t) \end{pmatrix}.
$$

2.2 مشکل بهینه سازی

در این مقاله، ما قصد داریم تا ابزار مورد انتظار ثروت ترمینال را به طور مداوم با تنظیم تخصیص در دارایی و نسبت بیمه اتکایی در افق زمانی به حداکثر برسانیم .$[0, T]$. زیرا ریسک تورم در بازار وجود دارد، ما باید سود

مورد انتظار از ارزش واقعی ثروت ترمینال را حداکثر سازی کنیم.X (T) بنابراین بهینه سازی مشکل را می توان به شرح ذیل نوشت:

$$\begin{cases} \max\left\{\mathbf{E}\left[U\left(\frac{X(T)}{I(T)}\right)\right]\right\} \\ \text{subject to: } X(0)=x,\ \overline{u}(t) \text{ admissible.} \end{cases} \tag{2.20}$$

تابع کارکرد CRRA عبارتند از:

$$U(x)=\frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad \gamma>0,\ \gamma\neq 1 \tag{2.21}$$

3. راه حل بهینه سازی مشکل

مشکل بهینه سازی (2.20) مسئله خود مالیات کلاسیک نیست. در بازار بیمه، بیمه گذار درآمد مستمری از حق بیمه دارد. بنابراین ممکن است نتوانیم مشکل را از طریق روش های کلاسیک حل کنیم. علاوه بر این، مشکل شامل استراتژی بیمه اتکایی و استراتژی های سرمایه گذاری است، بنابراین مشکل سرمایه گذاری واحد نیست. وجود بیمه اتکایی می تواند راه حل استراتژی بهینه را تحت تاثیر قرار دهد. به هر حال، شبیه به یک عامل تک مصرف و مشکل سرمایه گذاری در کاراتز و شروه (1998) می باشد، ما لما زیر را در X (t)تعریف می کنیم (2.19).

لما 3.1 : فرض کنیم $H(t)=\exp\{\int_0^t(r_n(s)+\frac{1}{2}\|\Lambda\|^2)\mathrm{d}s+\int_0^t\Lambda^T\mathrm{d}W(s)\}.$ سپس Ht ، SDE زیر را برآورد می کند:

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{H(t)}=[r_n(t)+\Lambda^T\Lambda]\mathrm{d}t+\Lambda^T\mathrm{d}W(t), \quad H(0)=1.$$

علاوه بر این، X (t)باید به شکل زیر باشد:

$$X(t)=\mathbf{E}\left[-\int_t^T\frac{\lambda\mu_1(\eta-\theta)H(t)}{H(s)}\mathrm{d}s+\frac{X(T)H(t)}{H(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right], \quad t\in[0,T].$$

اثبات: با استفاده از فرمول Itô برای فرایند $\{\frac{X(t)}{H(t)}\}$ ، داریم:

$$\mathrm{d}\left(\frac{X(t)}{H(t)}\right) = \lambda\mu_1(\eta-\theta)H^{-1}(t)\mathrm{d}t + [H^{-1}(t)\bar{u}^T(t) - X(t)H^{-1}\Lambda^T]\mathrm{d}W(t). \quad (3.1)$$

و بنابراین:

$$\mathrm{d}\left[\frac{X(t)}{H(t)} - \int_0^t \frac{\lambda\mu_1(\eta-\theta)}{H(s)}\mathrm{d}s\right] = [H^{-1}(t)\bar{u}^T(t) - X(t)H^{-1}\Lambda^T]\mathrm{d}W(t). \quad (3.2)$$

سپس $\{\frac{X(t)}{H(t)} - \int_0^t \frac{\lambda\mu_1(\eta-\theta)}{H(s)}\mathrm{d}s, 0 \le t \le T\}$ مارتینگال است، این لما به شرح ذیل است:

شبیه به مشکل سرمایه گذاری عمومی، H (t)ممکن است به عنوان هسته قیمت گذاری بازار مالی عمل کند. به دلیل وجود ریسک بیمه اتکایی، H (t)در واقع ترکیبی از ریسک بیمه اتکایی و بازار مالی است. علاوه بر این، در مورد خود-مالی، ما صرفا داریم: $X(t) = \mathbf{E}[\frac{X(T)H(t)}{H(T)}|\mathcal{F}_t]$ بدان معنی است که X (t) یک مارتینگال تحت ارزیابی ریسک بی خطر است. به هر حال، ما متوجه می شویم که ثروت بیمه گر یک سوپر مارتینگال تحت اندازه معینی در اثبات لما 3.1. است. اصطلاح $\lambda\mu_1(\eta-\theta)\mathrm{d}t$ in (2.19) به عنوان یک نتیجه مستمر از ثروت عمل می کند هنگامی که بیمه گر بیمه اتکایی و استراتژی های سرمایه گذاری را انتخاب می کند، اثر نتیجه نیز باید بررسی شود.

ما نشان دادیم $F(t) = \mathbf{E}[\int_t^T \frac{\lambda\mu_1(\eta-\theta)H(t)}{H(s)}\mathrm{d}s|\mathcal{F}_t]$, و آن می تواند به عنوان ارزش تخمین شده مورد انتظار نتایج پیوسته λμ1 (η - \ θ) dtثروت X (t) ، و ما لمام زیر را برای محاسبه F (t) داریم.

لما 32: مقدار تخفیفی f(t) می تواند به شرح ذیل نوشه شود:

F(t)= $\lambda\mu_1(\eta-\theta)\int_t^T B_n(t,s)\mathrm{d}s$, و F(t)، BSDE را به شرح ذیل برآورد می کند:

$$\begin{cases} \mathrm{d}F(t) = -\lambda\mu_1(\eta-\theta)\mathrm{d}t + F(t)[r_n(t) + \lambda_{r_n}\sigma_F(t,T)]\mathrm{d}t \\ \qquad +F(t)\sigma_F(t,T)\mathrm{d}W_{r_n}(t), \\ F(T) = 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\gamma_F(t,T) = \int_t^T \frac{\lambda\mu_1(\eta-\theta)\sigma_{B_1}(s-t)B_n(t,s)}{F(t)}\mathrm{d}s.$$

که

اثبات: از:

$$F(t) = \lambda\mu_1(\eta-\theta)\int_t^T \mathbf{E}\left[\frac{H(t)}{H(s)}\middle|\mathcal{F}_t\right]\mathrm{d}s, \tag{3.4}$$

آن کافی است تا $\mathbf{E}[\frac{H(t)}{H(s)}|\mathcal{F}_t], s \geqslant t$ محاسبه کنیم:

با استقلال $W_0(t),\ W_{r_n}(t),\ W_I(t)$ and $W_S(t)$، آن به سادگی به شرح ذیل است:

$$\begin{cases} \mathbf{E}\left[\frac{H(t)}{H(s)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \mathbf{E}\left[-\int_t^s \left(r_n(u)+\frac{1}{2}\|\Lambda\|^2\right)\mathrm{d}u \right. \\ \left. \quad -\int_t^s \Lambda^T\mathrm{d}W(u)|\mathcal{F}_t\right] \\ = \mathbf{E}\left[-\int_t^s\left(r_n(u)+\frac{1}{2}\lambda_{r_n}^2\right)\mathrm{d}u - \int_t^s \lambda_{r_n}\mathrm{d}W_{r_n}(u)|\mathcal{F}_t\right] \\ = \tilde{\mathbf{E}}\left[-\int_t^s (r_n(u))|\mathcal{F}_t\right] \\ = B_n(t,s). \end{cases} \tag{3.5}$$

بنابراین $F(t) = \lambda\mu_1(\eta-\theta)\int_t^T B_n(t,s)\mathrm{d}s$، آن را بطور مستقیم متمایز می کند، ما معادله دوم را بدست آوردیم:

3.1 یک مشکل کمکی

در این مقاله، ما فرایند کمکی $Y(t)$ تعریف شده توسط $Y(t) = X(t)+F(t)$، با مقدار اولیه ., $F(0) = f$ (2.19) و (3.3) بررسی می کنیم.

ما داریم

$$\mathrm{d}Y(t) = \mathrm{d}X(t) + \mathrm{d}F(t)$$

$$= r_n(t)Y(t)\mathrm{d}t + \begin{pmatrix} a(t) \\ \theta_B(t) + \dfrac{F(t)\sigma_F(t,T)}{\sigma_{B_1}(K_1)} \\ \theta_P(t) \\ \theta_S(t) \end{pmatrix}^T \times \sigma[\Lambda \mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)]$$
$$= r_n(t)Y(t)\mathrm{d}t + u(t)^T \sigma[\Lambda \mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)], \quad (3.6)$$

که $u(t) = \overline{u}(t) + (0, \frac{F(t)\sigma_F(t,T)}{\sigma_{B_1}(K_1)}, 0, 0)^T$ از آنجا که $F(T) = 0$ و آنچه که ما در مورد اهمیت ترمینال در زمان T است، ما می توانیم مشکل اصلی (2.20) به مشکل تامین خود -مالی کمکی زیر تبدیل کنیم. آن برای درک کردن ساده است، برای دریافت مشکل مالی خود، بیمه گر باید برای کاهش ریسک بازار، باید اوراق قرضه کوپن صفربیشتری به دلیل نتیجه ثروت خریداری کند. علاوه بر این، $Y(0) \geq 0$ باید در مدل ما برآورده شود، در غیر این صورت، ورشکستگی ممکن است در $[0, T]$ رخ دهد.

3.2 راه حل مشکل کمکی

همانطور که مشکل در بالا مطرح شد، یک مشکل خود تامین مالی که آن قابل حل است. به طور عمده دو روش برای حل آن وجود دارد، یکی روش برنامه ریزی پویا تصادفی، و دیگری روش مارتینگال است. در این مقاله، ما آن را با قبلی حل خواهیم کرد.

تعریف کردن

$$V(t, r_n, I, y) \triangleq \max_{u(t)} \left\{ \mathbf{E}\left[U\left(\frac{Y(T)}{I(T)}\right) \middle| r_n(t) = r_n \text{ and } I(t) = I, Y(t) = y \right] \right\}.$$

ما قضیه زیر را داریم

قضیه 3.3. معادله HJB مرتبط با مشکل کمکی (3.7) است

$$
\begin{cases}
\sup\Big\{ V_t + V_y[r_n y + u^{*T}(t)\sigma\Lambda] + V_{r_n} a(b - r_n) \\
\quad + V_I I (r_n - r_r + \sigma_{I_1}\lambda_{r_n} + \sigma_{I_2}\lambda_I) \\
\quad + \frac{1}{2} V_{yy} u^{*T}(t)\sigma\sigma^T u^*(t) + \frac{1}{2} V_{r_n r_n}\sigma_r^T\sigma_r \\
\quad + \frac{1}{2} V_{II} I^2 \sigma_I^T \sigma_I + V_{yr_n} u^{*T}(t)\sigma\sigma_r \\
\quad + V_{yI} I \sigma\sigma_I + V_{Ir_n} I \sigma_r^T \sigma_I \Big\} = 0,
\end{cases}
\qquad (3.8)
$$

که $\sigma_r = (0, -\sigma_{r_n}, 0, 0)', \ \sigma_I = (0, \sigma_{I_1}, \sigma_{I_2}, 0).$

اثبات: اثبات آن بسیار استاندارد است، به مارتون (1969)، فلمینگ و سونر (1993)، ویگنا و هابرمان (2001)، هی و لیانگ (2009) و منابع مراجعه کنید که ما آن را در اینجا حذف کردیم.

ما می توانیم عملکرد بازخورد مطلوب u*(t, y) را دریافت کنیم:

$$u^*(t, y) = -\frac{V_y \Sigma^{-1}\sigma\Lambda}{V_{...}} - \frac{V_{yI} I \Sigma^{-1}\sigma\sigma_I}{V_{...}} - \frac{V_{yr_n}\Sigma^{-1}\sigma\sigma_r}{V_{...}}, \qquad (3.9)$$

$$u^*(t, y) = -\frac{V_y \Sigma^{-1}\sigma\Lambda}{V_{yy}} - \frac{V_{yI} I \Sigma^{-1}\sigma\sigma_I}{V_{yy}} - \frac{V_{yr_n}\Sigma^{-1}\sigma\sigma_r}{V_{yy}}, \qquad (3.9)$$

که $\Sigma \triangleq \sigma\sigma^T$. جایگزینی u*(t, y) با معادله HJB، ما می توانیم فرم بسته V(t, rn, I, y) و به این ترتیب استراتژی بهینه را u*(t) = u*(t, Y*(t)), where {Y*(t)} دریافت کنیم که یک راه حل منحصر به فرد از SDE (3.6) با جایگزینی ضریب u(t) توسط u*(t, Y*(t)). می باشد. بنابراین به شرح زیر داریم.

پیشنهاد 3.4. استراتژی سرمایه گذاری-بیمه اتکایی بهینه u*(t) است

$$
\begin{aligned}
u^*(t) &= \frac{Y^*(t)}{\gamma}\Sigma^{-1}\sigma\Lambda + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)Y^*(t)\Sigma^{-1}\sigma\sigma_I \\
&= \frac{X^*(t)+F(t)}{\gamma}\begin{pmatrix} \frac{\mu_1\theta}{\mu_2} \\ \frac{\lambda_{r_n}}{\sigma_{B_1}(K_1)} - \frac{\lambda_I\sigma_{P_1}}{\sigma_{B_1(K_1)}\sigma_{P_2}} + \frac{\lambda_S(\sigma_{P_1}\sigma_{S_2} - \sigma_{S_1}\sigma_{P_2})}{\sigma_{B_1}(K_1)\sigma_{P_2}\sigma_{S_3}} \\ \frac{\lambda_I}{\sigma_{P_2}} - \frac{\lambda_S\sigma_{S_2}}{\sigma_{P_2}\sigma_{S_3}} \\ \frac{\lambda_S}{\sigma_{S_3}} \end{pmatrix} \\
&\quad + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)(X^*(t)+F(t))\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}. \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

The closed-form of $V(t, r_n, I, y)$ is

$$
V(t, r_n, I, y) = \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{y}{I}\right)^{1-\gamma} h(t) \qquad (3.11)
$$

and

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \exp\left\{\int_t^T (\gamma-1)\left[-r_r(s) + \sigma_{I_1}\lambda_r + \sigma_{I_2}\lambda_I - \frac{1}{2\gamma}\Lambda^T\Lambda\right.\right. \\
&\quad \left.\left. - \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\Lambda^T\sigma_I - \frac{1}{2\gamma}\sigma_I^T\sigma_I\right]\mathrm{ds}\right\}.
\end{aligned}
$$

اثبات: به ضمیمه مراجعه کنید

اولین عبارت در $u^*(t)$فرم کلی استراتژی مطلوب در چارچوب خود تامین مالی است. اصطلاح دوم تنها سرمایه گذاری TIPS است و از آن برای ریسک تورم استفاده می شود. از آنجا که در مدل ما، نرخ بهره اسمی و تورم همبستگی نزدیک است و آنچه که در مورد آن اهمیت دارد، ارزش واقعی است و نرخ بهره واقعی قطعی است، ما فقط نیاز به ریسک کردن داریم، از تورم و ریسک نرخ بهره می تواند نادیده گرفته شود. علاوه بر ابزار مطلوب V(t, rn, I, y) همچنین با نرخ بهره اسمی همخوانی ندارد.

3.3 راه حل مشکل اصلی

هنگامی که راه حل مشکل کمکی را به دست می آوریم، ما به راحتی می توانیم راه حل مشکل اصلی (2.20) را بیابم. این استراتژی های سرمایه گذاری مجدد بیمه بهینه از مشکل اصلی هستند که عبارتند از

$$
\overline{u}^*(t) = u^*(t) - \left(0, \frac{F(t)\sigma_F(t,T)}{\sigma_{B_1}(K_1)}, 0, 0\right)^T, \qquad (3.12)
$$

یعنی، از آنجا که یک نتیجه مستمر در مدل ما وجود دارد، ما باید $\frac{F(t)\sigma_F(t,T)}{\sigma_{B_1}(K_1)}$ اوراق قرضه کوپن صفر برای به دست آوردن ابزار مطلوب قرض بگیریم.

.3.4استراتژی بهینه

ما مشاهده می کنیم که Y * (t) در استراتژی بهینه (t) * u وجود دارد. در واقع، در بازار، Y * (t)قابل مشاهده نیست. با توجه به اینکه

F (t) = $\lambda\mu_1(n-\theta)\int_t^T B_n(t,s)ds$ in $Y^*(t) = X^*(t) + F(t)$

را بدست Y * (t) بنابراین تقریبی را توسط اوراق قرضه کوپن صفر با دوره های مختلف و F (t) ما می توانیم آوریم. به هرحال، ممکن نیست ما کوپن اوراق قرضه صفر در بازار نداشته باشیم، شیوه کار نمی کند بنابراین ما Y * (t) از نظر دارایی ها و شاخص ها در بازار تبدیل می کنیم. با مشاهده ارزش دارایی ها و شاخص ها در بازار، ما به راحتی می توانیم Y * (t) و در نتیجه استراتژی بهینه را دریافت کنیم. جایگزینی (3.10) به (3.6)، ما داریم

$$dY^*(t) = Y^*(t)\left\{\left[r_n(t) + \frac{1}{\gamma}\Lambda^T\Lambda + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\Lambda\right]dt + \left[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\right]dW(t)\right\}. \quad (3.13)$$

فرمول نشان می دهد که Y * (t) به دنبال یک حرکت هندسی براونی است. چون در بازار ما هیچ دارایی برای نشان دادن ریسک بیمه نداریم، به منظور نشان دادن(t) * Y ، ابتدا نیاز به معرفی دارایی فریبنده Z (t) تعریف شده توسط معادله ذیل داریم:

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = \frac{\lambda\mu_1\theta}{\gamma\sqrt{\lambda\mu_2}}dW_0(t). \quad (3.14)$$

با ترکیب، ما Y * (t) را به شرح ذیل بازنویسی می کنیم

$$Y^*(t) = (x+f)e^{mt}\left(\frac{S_0(t)}{S_0(0)}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{B_{K_1}(t)}{B_{K_1}(0)}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{P_{K_2}(t)}{P_{K_2}(0)}\right)^{\alpha_3} \times \left(\frac{S_1(t)}{S_1(0)}\right)^{\alpha_4}\frac{Z(t)}{Z(0)}. \tag{3.15}$$

تنوع (t) * Y و سپس آن را با (3.13) مقایسه کنید، پارامترها معادلات زیر را برآورد می کنند:

$$\begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix}\sigma_{B_1}(K_1) & \sigma_{I_1} & \sigma_{S_1}\\ 0 & \sigma_{I_2} & \sigma_{S_2}\\ 0 & 0 & \sigma_{S_3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_{r_n}\\ \lambda_I\\ \lambda_S\end{pmatrix} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\begin{pmatrix}\sigma_{B_1}(K_1) & \sigma_{I_1} & \sigma_{S_1}\\ 0 & \sigma_{I_2} & \sigma_{S_2}\\ 0 & 0 & \sigma_{S_3}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sigma_{I_1}\\ \sigma_{I_2}\\ 0\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

علاوه بر این،

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4,\\ m &= \frac{1}{\gamma}\Lambda^T\Lambda + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\Lambda - \alpha_2\lambda_r\sigma_{B_1}(K_1)\\ &\quad - \frac{1}{2}\alpha_2(\alpha_2-1)\sigma_{B_1}(K_1)^2 - \alpha_3(\sigma_{I_1}\lambda_r + \sigma_{I_2}\lambda_I)\\ &\quad - \frac{1}{2}\alpha_3(\alpha_3-1)(\sigma_{I_1}^2+\sigma_{I_2}^2) - \alpha_4(\sigma_{S_1}\lambda_{r_n}\\ &\quad + \sigma_{S_2}\lambda_I + \sigma_{S_3}\lambda_S) - \frac{1}{2}\alpha_4(\alpha_4-1)(\sigma_{S_1}^2+\sigma_{S_2}^2+\sigma_{S_3}^2)\\ &\quad - \alpha_2\alpha_3\sigma_{B_1}(K_1)\sigma_{I_1} - \alpha_2\alpha_4\sigma_{B_1}(K_1)\sigma_{S_1}\\ &\quad - \alpha_3\alpha_4(\sigma_{I_1}\sigma_{S_1}+\sigma_{I_2}\sigma_{S_2}).\end{aligned}$$

با استفاده از این پارامترها ما می توانیم (t) * Y را از لحاظ (t) S0 (t) BK1، (t) PK2و .(Z (t بیان کنیم. زیرا Z(t) دارایی فریبنده است، آن در بازار وجود ندارد. به هرحال، این ادعا را می توان در بازار بیمه مشاهده کرد. در حقیقت، ما می توانیم به آن توسط فرم های بسته زیر برسیم:

$$Z(t) = Z(0)\exp\left[-\frac{\lambda\mu_1^2\theta^2}{2\gamma^2\mu_2}t + \frac{\lambda\mu_1\theta}{\gamma\sqrt{\lambda\mu_2}}W_0(t)\right]. \tag{3.17}$$

زیرا مقدار اولیه (Z (t می تواند به طور خودسرانه انتخاب شود. صرفا، ما .1 = (Z (0 را تنظیم می کنیم. همانطور که ما می توانیم ادعاهای را با(W0 (t در تحقیق قبلی تقریب بزنیم، ما همچنین قادر به تقریب (Z (t با ادعاها داریم

و بنابراین Z (t) قابل مشاهده در بازار است. علاوه بر این، پیرو گراندل (1991)، ما Z (t) را با معادله ذیل محاسبه می کنیم:

$$Z(t) = \exp\left[-\frac{\lambda \mu_1^2 \theta^2}{2\gamma^2 \mu_2} t + \frac{\lambda \mu_1^2 \theta}{\gamma \mu_2} t + \frac{\mu_1 \theta}{\gamma \mu_2} \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right]. \qquad (3.18)$$

جدول 1: ارزش های پارامتر در مدل ما

تفسیر متن	نماد	مقدار
مخالفت ریسک	γ	2
بیمه اتکایی نسبی		
شدت بیمه	Λ	3
میانگین ادعای	μ1	0.08
لحظه دوم ادعا	μ2	0.05
بارگیری ایمنی از بیمه گر	η	0.05
بارگیری ایمنی از بیمه گر اتکایی	θ	0.1
نرخ بهره اسمی		
مقدار اولیه	r0	0.05
میانگین معکوس	a	0.1
نوسان نرخ بهره اسمی	σrn	0.01
نرخ بهره واقعی	r_r	0.045
نوسان شاخص تورم	(σI1 ،σI2)	(0.08-0.05)
موعد اوراق قرضه کوپن صفر رول	K1	10
نوسان سهام	(σS1، σS2، σS3)	(.01، 0.08؛ 0.1)
افق زمانی	T	20
مبلغ اولیه	x0	1
مقدار اولیه شاخص تورم	I (0)	1

4. تجزیه و تحلیل حساسیت

در این بخش برخی از نمونه های عددی برای نمایش چگونه استراتژی بهینه و ابزار مطلوب متفاوت ارائه می شود. در مقابل مورد مسائل مالی خود و نه سرمایه گذاری مطلوب مقادیر و نسبت های مطلوب قطعی است. ما

می توانیم فقط مقدار دقیق تخصیص متوسط یا میانگین را مطالعه کنیم. اولا، ما پیشنهاد زیر را داریم.

پیشنهاد 4.1 .انتظار از Y (t) به شرح ذیل است

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[Y^*(t)] = Y_0 \exp\Bigg\{&(r_0 - b)\frac{1-\exp(-at)}{a} + bt + \frac{1}{\gamma}\Lambda^T\Lambda t \\ &+ \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\Lambda t + \frac{\sigma_{r_n}^2}{2a^2}\Bigg[t + \frac{2\exp(-at)}{a} \\ &- \frac{\exp(-2at)}{2a} - \frac{3}{2a}\Bigg] \\ &- \sigma_{r_n}\left[\frac{1}{\gamma}\lambda_{r_n} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_{I_1}\right]\left[\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

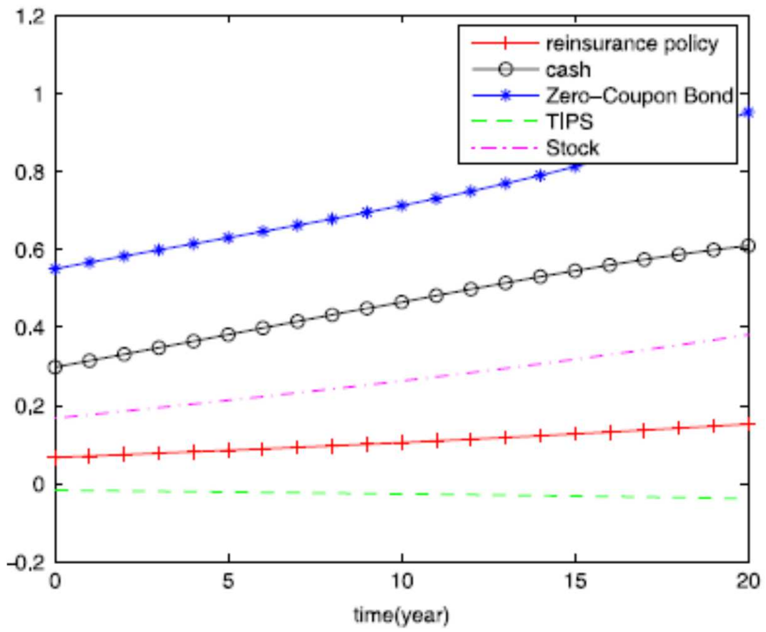
اثبات: به ضمیمه مراجعه کنید

بعد، حساسیت سرمایه گذاری بهینه و استراتژی های بیمه اتکایی را تحلیل می کنیم. مگراینکه در غیراینصورت ذکر شود، اطلاعات پایه ما برای تطبیق مدل در جدول 1 ارائه شده است.

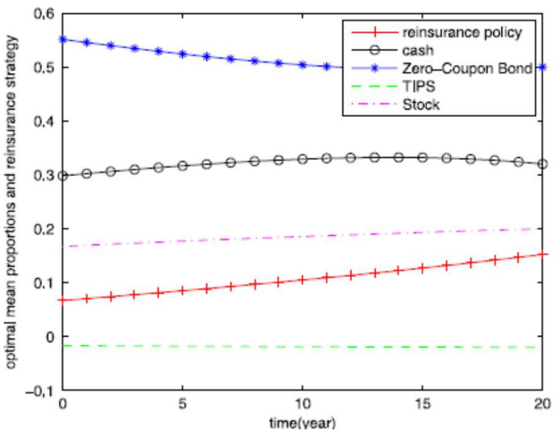
4.1 تجزیه و تحلیل حساسیت استراتژی های بهینه سرمایه گذاری

اول، ما تکامل بیمه اتکایی و استراتژی های سرمایه گذاری در بعضی موارد نشان می دهیم و تأثیرات پارامترها بر روی آنها را بررسی می کنیم. شکل 1 نشان می دهد که ما به شدت در اوراق قرضه کوپن صفر سرمایه گذاری می کنیم، که در طول زمان به شدت افزایش می یابد، یعنی منحنی اوراق قرضه کوپن صفر سریعتر از 0.55 در زمان 0 تا 0.95 در زمان 20، می باشد و با این حال TIPS نسبتا پایدار است. بر خلاف شکل 1، شکل 2نشان می دهد که در واقع نسبت اوراق قرضه صفر کوپن در طول زمان کاهش می یابد، در حالی که نسبت سهام به آرامی افزایش می یابد. این نسبت بیمه اتکایی به آرامی تا حدود 0.18 در زمان 20 افزایش می یابد، این بدان معنی است که ما در حال تقسیم کردن ریسک کمتر بیمه هستیم همانطورکه زمان می گذرد. همچنین در شکل 1 نشان داده شده است که ریسک تورم برای ما بسیار مهم نیست و ما فقط نیاز به کوتاه کردن چند TIPS برای حافظت از ریسک تورم داریم. علاوه بر این، نسبت پول، سهام و TIPS کمی در شکل تغییر پیدا می کند.

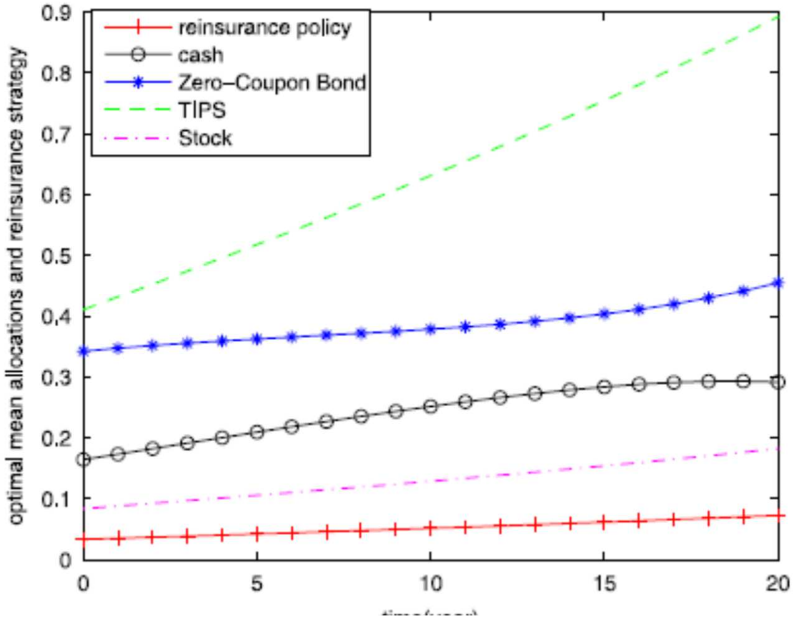
شکل 3 استراتژی بیمه اتکایی و تخصیص متوسط بهینه را نشان می دهد زمانی که $\gamma = 4$ است. در این مورد، پول سرمایه گذاری شده در TIPS بزرگتر است و از 0.41 به 0.89 افزایش می یابد. علاوه بر این نسبت TIPS ها به شدت افزایش می یابد. تخصیص میانگین نقدی بعد از افزایش برای مدتی از طریق مقایسه با مورد ثابت باقی می ماند $\gamma = 2$. ما همچنین نیازهای کمی از پول نقد و سهام داریم. تفاوت بین دو مورد فوق به طور عمده به دلیل اجتناب از ریسک γ می باشد.



شکل 1: $\gamma = 2$



شکل 2: $\gamma = 2$



شكل 3: 4 = γ

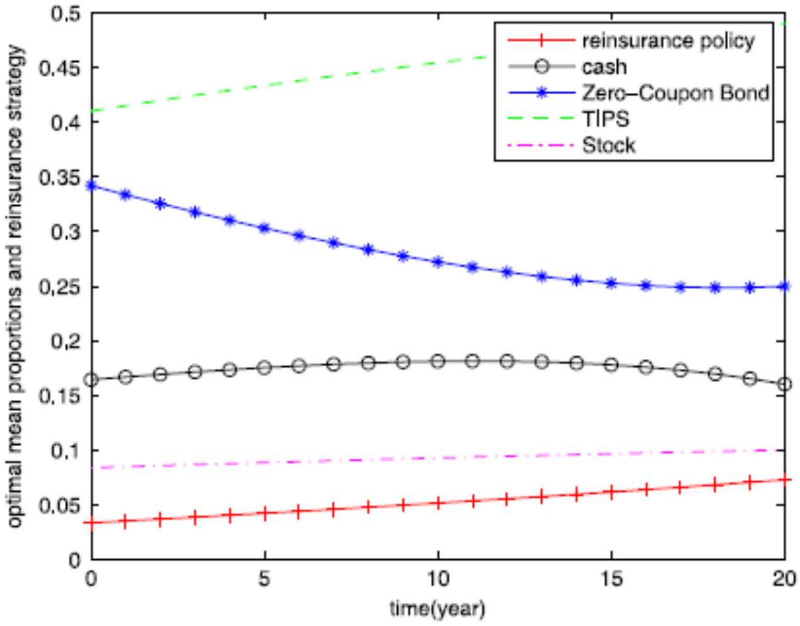
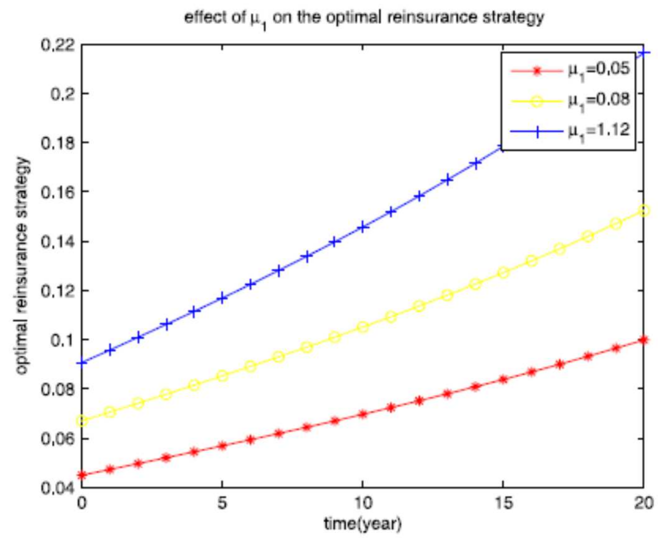


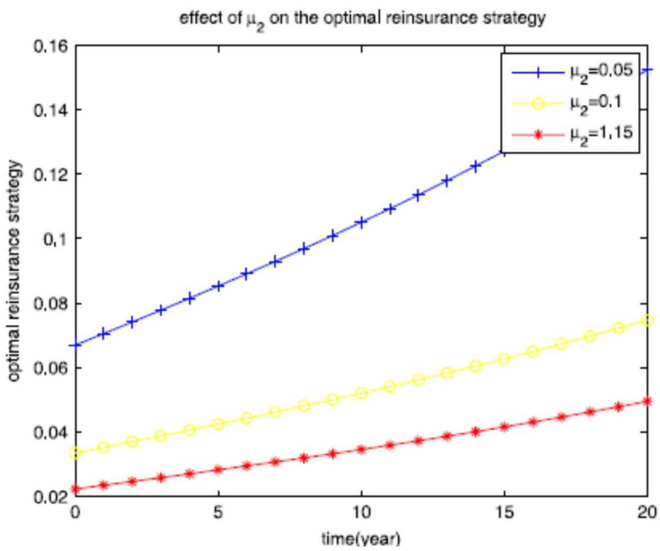
Fig. 4. $\gamma = 4.$

شكل 4: 4 = γ



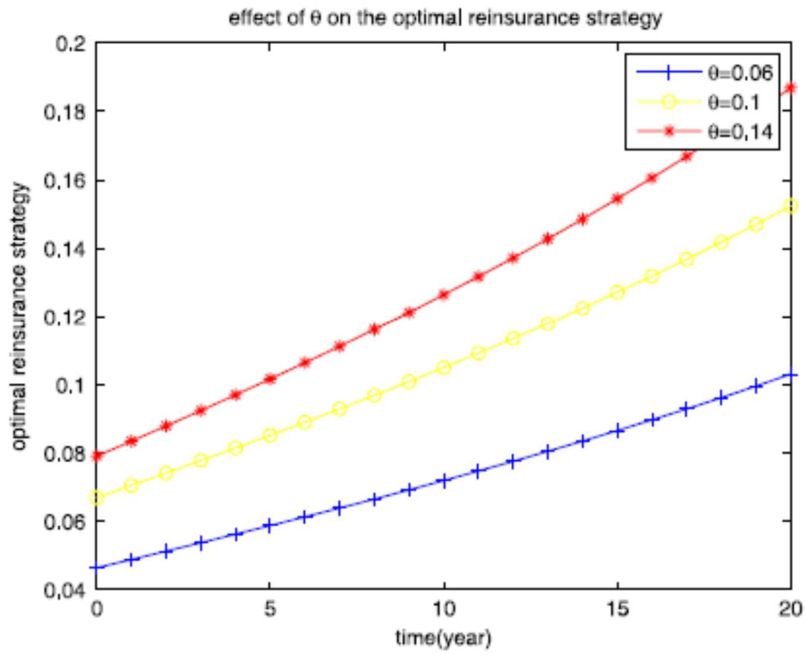
effect of μ1 on the optimal reinsurance strategy
optimal reinsurance strategy
time(year)
μ1=0,05
μ1=0.08
μ1=1.12
0,22
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0,06
0.04
0
5
10
15
20

شكل 5



effect of μ2 on the optimal reinsurance strategy
optimal reinsurance strategy
time(year)
μ2=0.05
μ2=0.1
μ2=1,15
0.16
0.14
0.12
0,1
0,08
0.06
0.04
0.02
0
5
10
15
20

شكل 6



شکل 7

γ بالاتر باعث می شود بیمه گر به ریسک در بازار حساس تر باشد. بنابراین، بیمه گر TIPS بیشتر را برای اجتناب از ریسک تورم خریداری خواهد کرد و ریسک بیمه بیشتر برای بیمه گر می باشد. از آنجا که TIPS با نرخ بهره اسمی ارتباط دارد، ما می توانیم مانع بخشی از ریسک بهره شویم و در نتیجه تخصیص متوسط اوراق قرضه کوپن صفر واقعا کاهش می یابد زمانی که γ از 2 به 4 تغییر می کند. دو عدد همچنین اثر γ را در مورد بیمه اتکایی بهینه توصیف می کند (مراجعه کنید به شکل 4).

γ بالاتر به معنی گریز از ریسک بیشتر است، بنابراین در این وضعیت بیمه گر انتظار دارد که به شدت ریسک بیمه خود را کاهش دهد و به همین ترتیب بیمه اتکایی بازرگانی بیشتری خرید خواهد کرد.

4.2 تجزیه و تحلیل حساسیت استراتژی بهینه بیمه اتکایی

سیاست بیمه اتکایی در مدل ما ضروری است و ما نیز مربوط می شویم که چگونه پارامترها بر استراتژی بیمه اتکایی تاثیر می گذارد. شکل 5 ارتباط بین سیاست بیمه اتکایی بهینه را نشان می دهد و انتظار یک ادعا $\mu 1$ را

دارد. استراتژی بیمه اتکایی با 1μ افزایش می یابد و باعث ریسک بیشتر بیمه برای بیمه گر می شود. در واقع، ما از فرمول ثروت متوجه می شویم که $\mu1$ برای پوشش ریسک بیشتر می باشد که ما از بیمه می خواهیم، می توانیم درآمد بیشتری از حق بیمه بدست آوریم. بنابراین، ما ریسک بیشتری برای بیمه خواهیم داشت. همانطور که بیمه گر ریسک بیمه خود را با بیمه اتکایی کنترل می کند، استراتژی بیمه اتکایی مطلوب نیز به لحظه دوم 2μ از ادعا بستگی دارد. در بازار، 2μ را می توان به عنوان ریسک بیمه تفسیر کرد. استراتژی بیمه اتکایی رابطه مثبتی با 2μ دارد، که در شکل 6 نشان داده شده است. به عبارت دیگر، اگر ریسک بیمه بزرگتر شود، بیمه گر باید ریسک بیشتری برای بیمه گر اتکایی کند تا بیمه گر اتکایی بتواند ثروت مطلوب را به دست آورد.

علاوه بر این، پارامتر بارگیری ایمنی θ نیز عامل مهمی است که می تواند بر استراتژی بیمه اتکایی تاثیر بگذارد. θ هزینه را برای جلوگیری از ریسک بیمه ارزیابی می کند.

با θ بالاتر، بیمه گر باید هزینه بیشتری را برای جلوگیری ریسک بیمه انجام دهد، یعنی، بیمه گر ریسک بیشتری از بیمه توسط خود می کند.

بنابراین استراتژی بیمه اتکایی بطور مثبت با ایمنی بارگیری بیمه گر θ رابطه مثبت دارد، که توسط شکل 7 نشان داده شده است. همچنین می تواند از فیش 8-10 دیده شود که میانگین سیاست بیمه اتکایی در حال افزایش تابع زمان t است.

4.3. تجزیه و تحلیل حساسیت استفاده بهینه

این بخش نشان می دهد که چگونه پارامترها بر روی استفاده بهینه تاثیر می گذارد. فرم بسته ی استفاده بهینه در پیشنهاد 3.4. ارائه شده است. ما از اصطلاح سرمایه گذاری بهینه و استراتژی های بیمه اتکایی متوجه شدیم که نرخ سود واقعی rr با آنها همبستگی ندارد. بنابراین، در بازار با نرخ های بهره واقعی متفاوت، ما همان استراتژی های بهینه را اتخاذ خواهیم کرد.

به هر حال، rr در واقع بر ابزار بهینه تاثیر می گذارد. شکل 8 نشان می دهد که ابزار نهایی بطور مثبت مرتبط با rr می باشد. وقتی نرخ بهره واقعی بیشتر می شود، پول واقعی ما ارزش بیشتری دارد و بنابراین ما می توانیم کاربرد بیشتری داشته باشیم. علاوه بر این، اگر نرخ بهره اسمی اولیه 0r افزایش یابد ما با سرمایه گذاری پول و همچنین کاربرد بیشتری به دست خواهیم آورد، همانطور که در شکل 9 نشان داده شده است. پارامتر λ به معنای شدت ادعا است، بنابراین اگر λ افزایش یابد، ممکن است ادعاهای بیشتری در یک زمان ثابت افقی داشته باشیم، یعنی ما پول بیشتری را از دست خواهیم داد و ابزار کاهش خواهد یافت.

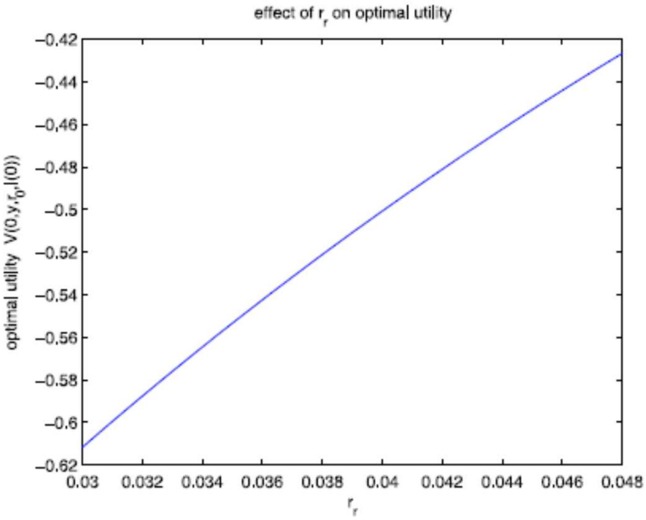


Fig. 8.

شکل 8

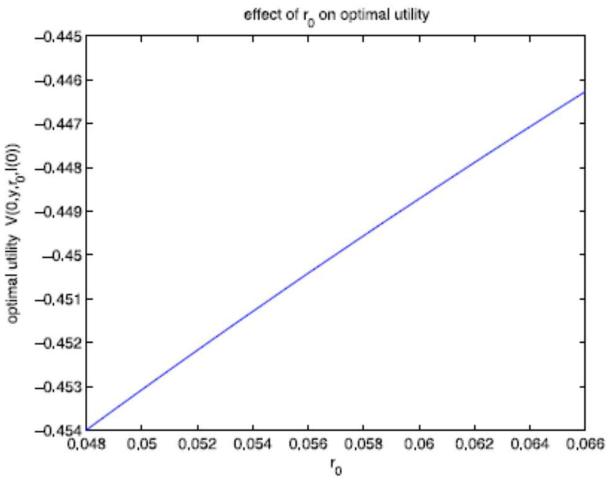
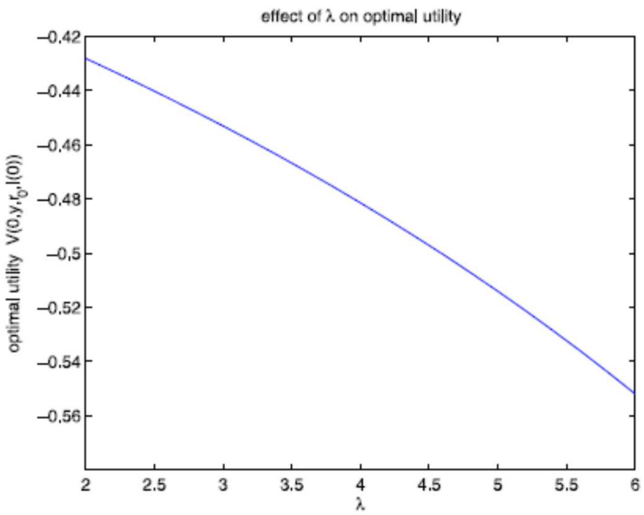


Fig. 9.

شکل 9



شکل 10

5. نتیجه گیری

در این مقاله، مشکلات بیمه اتکایی بهینه و سرمایه گذاری تحت نرخ بهره اسمی تصادفی و شاخص تورم تصادفی بررسی می کنیم. نرخ بهره اسمی توسط روند Ornstein-Uhlenbeck مدل سازی شده است و شاخص تورم از معادله فیشر نشئت گرفته است. فرایند مازاد بیمه گر ابتدا توسط مدل لاندبرگ کلاسیک شده است و توسط فرایند انتشار تقریب زده می شود.

ما می توانیم در اوراق قرضه نقدی، کوپن صفر، TIPS و سهام برای جلوگیری از ریسک سرمایه گذاری کنیم. از آنجا که مشکل اصلی خود تامین مالی نیست، ما مشکل خود تامین مالی کمکی را معرفی می کنیم و آن را با برنامه ریزی پویا تصادفی حل می کنیم. در نهایت، ما استراتژی های بیمه اتکایی و سرمایه گذاری تحت حداکثر استفاده از CRRA در بخش 3 را به دست می آوریم.

استراتژی بهینه شامل یک استراتژی جهت به دست آوردن استفاده بهینه، سرمایه گذاری بهینه برای جلوگیری از ریسک تورم و سرمایه گذاری در اوراق قرضه کوپن صفر به منظور مقابله با اثر نتیجه ثروت می باشد. ما همچنین دریافتیم که نرخ بهره واقعی هیچ تاثیری بر استراتژی های بازاریابی و سرمایه گذاری بهینه ندارد. علاوه بر این، ما تجزیه و تحلیل حساسیت در پایان این مقاله برای نشان دادن رفتار اقتصادی استراتژی بهینه و سودمندی مطلوب ارائه می دهیم.

تشکر و قدردانی

ما می خواهیم از داوران ناشناس برای پیشنهادات و نظرات ارزشمند آنها قدردانی کنیم، که مقاله را بسیار بهتر کرده است. ما همچنین از شرکت کنندگان سمینار در مورد تجزیه و تحلیل تصادفی، تشکر می کنیم ، بیمه ریاضی و امور مالی ریاضی در گروه علوم ریاضی، دانشگاه تسینگوآ برای بازخورد و مکالمات مفید آنها تشکر و قدردانی می کنیم. دومین نویسنده تمایل دارد تا از NSFC برای حمایت از پروژه 11071136 تشکر کند.

ضمیمه

1A : اثبات پیشنهاد 3.4

شرایط مرزی برای $V(t,y,r_n,I)$ is $V(T,y,r_n,I) = \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{y}{I}\right)^{1-\gamma}$. ما حدس می زنیم که عبارت y in $V(t,y,r_n,I)$ می تواند تفکیک شده باشد $/(t,y,r_n,I)$ دارای فرم زیر است:

$$V(t,y,r_n,I) = \frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{y}{I}\right)^{1-\gamma} h(t,r_n), \quad \text{and} \quad h(T,r_n) = 1. \text{ (A.1)}$$

جایگزین (1A.) به (3.9) ، متوجه می شویم که استراتژی بهینه (u *t) به شرح ذیل است

$$u^*(t) = \frac{y}{\gamma}\Sigma^{-1}\sigma\Lambda + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)y\Sigma^{-1}\sigma\sigma_I + \frac{1}{\gamma}\frac{h_{r_n}}{h}y\Sigma^{-1}\sigma\sigma_r. \tag{A.2}$$

بعد، ما آخرین فرمول را با (3.4) جایگزین می کنیم و متوجه می شویم که $h(t,r_n)$ معادله زیر را برآورده می کند:

h (t، rn) از معادله زیر رضایت دارد:

راه حل h (t، rn) باید به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}
&\frac{h_t}{h} + \frac{h_{r_n}}{h}[ab - ar_n + (\gamma-1)\sigma_r^T\sigma_I] - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{h_{r_n}^2}{h^2}\sigma_r^T\sigma_r \\
&- \frac{h_{r_n}}{h}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma}\Lambda^T\sigma_r + \frac{(1-\gamma)^2}{\gamma}\sigma_I^T\sigma_r\right] \\
&+ \frac{1}{2}\frac{h_{r_nr_n}h}{h}\sigma_r^T\sigma_r + (\gamma-1)(-r_r + \sigma_{I_1}\lambda_r + \sigma_{I_2}\lambda_I) \\
&+ \frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma-2)\sigma_I^T\sigma_I - (\gamma-1) \\
&\times \left[\frac{1}{2\gamma}\Lambda^T\Lambda + \frac{(1-\gamma)^2}{2\gamma}\sigma_I^T\sigma_I + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\Lambda^T\sigma_I\right] = 0.
\end{aligned}$$

راه حل h(t, rn) باید فرم زیر را داشته باشد:

$$h(t,r_n) = \exp[q_1(t)r_n + q_2(t)], \tag{A.3}$$

و 1q (t) و 2q (t) باید شرایط مرزی q1(t)=q2(t)=0را برآورده می کنند. بنابراین فرمهای صریح

q1(t)=q2(t) را به دست می آوریم:

$$q_1(t) = 0,$$
$$q_2(t) = \int_t^T (\gamma - 1)\left[-r_r(s) + \sigma_{I_1}\lambda_r + \sigma_{I_2}\lambda_I - \frac{1}{2\gamma}\Lambda^T\Lambda - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\Lambda^T\sigma_I - \frac{1}{2\gamma}\sigma_I^T\sigma_I\right]\mathrm{d}s.$$

هنگامی که فرم صریح h(t, rn) را دریافت می کنیم، فرم های صریح u*(t) and V(t, y, rn, I) را می توان به راحتی مشتق کرد، بنابراین از پیشنهاد پیروی می کند.

2A. : اثبات پیشنهاد 4.1

برای محاسبه $\mathrm{E}[Y^*(t)]$, ابتدا موارد زیر را در مورد r_n (t) داریم.

لما 1A. روند Ornstein-Uhlenbeck توسط rn(t) برآورده می شود که معادله قابل حل و فرم صریح rn(t) است

$$r_n(t) = (r_0 - b)\exp(-at) + b - \sigma_{r_n}\exp(-at) \times \int_0^t \exp(as)\mathrm{d}W_{r_n}(s). \tag{A.4}$$

علاوه براین، انتگرال rn(t) به شرح ذیل است:

$$\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s = (r_0 - b)\frac{1 - \exp(-at)}{a} + bt - \int_0^t \sigma_{B_1}(t - s)\mathrm{d}W_{r_n}(s). \tag{A.5}$$

بنابراین $\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s$ یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال است

i.e., $\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s \sim N[(r_0 - b)\frac{1-\exp(-at)}{a} + bt, \frac{\sigma_{r_n}^2}{a^2}[t + \frac{2\exp(-at)}{a} - \frac{\exp(-2at)}{2a} - \frac{3}{2a}]]$.

اثبات: ما به سادگی متوجه شدم که راه حل معادله Ornstein–Uhlenbeck اولین فرمول است. برای فرمول دوم، ما داریم

$$\begin{aligned}\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}(s) &= \int_0^t \bigg[(r_0-b)\exp(-as)+b \\ &\qquad -\sigma_{r_n}\exp(-as)\int_0^s \exp(au)\mathrm{d}W_{r_n}(u)\bigg]\mathrm{d}s \\ &= (r_0-b)\frac{1-\exp(-at)}{a}+bt \\ &\qquad -\sigma_{r_n}\int_0^t \exp(-as)\int_0^s \exp(au)\mathrm{d}W_{r_n}(u)\mathrm{d}s \\ &= (r_0-b)\frac{1-\exp(-at)}{a}+bt \\ &\qquad -\sigma_{r_n}\int_0^t \frac{1-\exp(-a(t-s))}{a}\mathrm{d}W_{r_n}(s) \\ &= (r_0-b)\frac{1-\exp(-at)}{a}+bt \\ &\qquad -\int_0^t \sigma_{B_1}(t-s)\mathrm{d}W_{r_n}(s).\end{aligned}$$

و بنابراین توزیع $\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s$ ادامه پیدا می کند.

بعد، ما از میانگین $Y^*(t)$ مشتق گرفتیم. در حقیقت، $Y^*(t)$ به شرح ذیل است:

$$\begin{aligned}Y^*(t) &= Y_0\exp\bigg\{\frac{1}{\gamma}\Lambda^T\Lambda t+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\Lambda t-\frac{1}{2}\bigg[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T \\ &\qquad +\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\bigg]\bigg[\frac{1}{\gamma}\Lambda+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I\bigg]t \\ &\qquad +\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s+\bigg[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\bigg]W(t)\bigg\}.\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\mathbf{E}[Y^*(t)] = Y_0 \exp\left\{\frac{1}{\gamma}\Lambda^T \Lambda t + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T \Lambda t \right.$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\right]\left[\frac{1}{\gamma}\Lambda + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I\right]t\Bigg\}$$
$$\cdot \mathbf{E}\exp\left\{\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s + \left[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\right]W(t)\right\}$$
$$= Y_0 \exp\left\{\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2\gamma^2}\right)\Lambda^T \Lambda t + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^2 \Lambda^T \Lambda t \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)^2 \sigma_I^T \sigma_I t\right\}$$
$$\cdot \mathbf{E}\exp\left\{\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s + \left[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\right]W(t)\right\}. \quad (A.7)$$

ما فقط نیاز به محاسبه $\mathbf{E}\{\exp\{\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s + [\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + (1-\frac{1}{\gamma})\sigma_I^T]W(t)\}\}$ داریم

دلالت می کند بر $Q_t = \int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s + [\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + (1-\frac{1}{\gamma})\sigma_I^T]W(t).$

$$\mathrm{Var}\left[\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s\right] = \frac{\sigma_{r_n}^2}{a^2}\left[t + \frac{2\exp(-at)}{a} - \frac{\exp(-2at)}{2a} - \frac{3}{2a}\right]$$

and

$$\mathrm{Cov}\left[\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s, \left[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\right]W(t)\right]$$
$$= \mathbf{E}\left[\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s \cdot \left[\frac{1}{\gamma}\Lambda^T + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T\right]W(t)\right]$$
$$= \left[\frac{1}{\gamma}\lambda_{r_n} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_{I_1}\right]\mathbf{E}\left[\int_0^t r_n(s)\mathrm{d}s \cdot W_{r_n}(t)\right]$$
$$= -\left[\frac{1}{\gamma}\lambda_{r_n} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_{I_1}\right]$$
$$\times \mathbf{E}\left[\int_0^t \sigma_{B_1}(t-s)\mathrm{d}W_{r_n}(s)\int_0^t \mathrm{d}W_{r_n}(s)\right]$$
$$= -\left[\frac{1}{\gamma}\lambda_{r_n} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_{I_1}\right]\int_0^t \sigma_{B_1}(t-s)\mathrm{d}s$$
$$= -\sigma_{r_n}\left[\frac{1}{\gamma}\lambda_{r_n} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_{I_1}\right]\left[\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}\right],$$

ما بدست می آوریم:

$$\mathbf{E}[Y^*(t)] = Y_0 \exp\left\{(r_0 - b)\frac{1-\exp(-at)}{a} + bt + \frac{1}{\gamma}\Lambda^T \Lambda t \right.$$
$$+ \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_I^T \Lambda t + \frac{\sigma_{r_n}^2}{2a^2}\left[t + \frac{2\exp(-at)}{a}\right.$$
$$\left. - \frac{\exp(-2at)}{2a} - \frac{3}{2a}\right]$$
$$\left. - \sigma_{r_n}\left[\frac{1}{\gamma}\lambda_{r_n} + \left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\sigma_{I_1}\right]\left[\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{e^{-at}}{a^2}\right]\right\}.$$