مدول میانگین پذیر برای جبرهای نیم گروهی

چکیده. ما مفهوم میانگین پذیری جبر باناخ A را در موردی که یک ساختار مدول A *اضافی* در A وجود دارد، شرح و بسط داده و نشان می دهیم که چه زمانی S یک نیم گروه معکوس با نیم گروه فرعی- E خودتوان است، سپس $A = \ell^1(s)$ به عنوان یک مدول باناخ روی $\mathfrak{A} = \ell^1(E)$ مدول میانگین پذیر است اگر S میانگین پذیر باشد . هنگامی که S یک گروه ناپیوسته باشد، $\ell^1(E) = \mathbb{C}$ و این صرفا قضیه مشهور جانسون است.

1.مقدمه

قضیه مشهور جانسون (در این مورد گسسته) اثبات می نماید که یک گروه گسسته G میانگین پذیر است اگر و تنها اگر جبر باناخ $\ell^1(\mathrm{G})$ میانگین پذیر باشد. این این امر برای نیم گروه های گسسته صدق نمی کند (حتی برای موارد خوبی مانند نیم گروه های کلیفورد). درقع دانفورد و نامیوکا نشان داده‌اند که برای یک طبقه وسیع از نیم گروه های معکوس (طبقه نیم گروه های معکوس$\ell^1(s)$ میانگین پذیر نیست، مگر اینکه این نیم گروه $E = E_S$ از عناصر خودتوان [DN] بی نهایت باشد.

مفهوم میانگین پذیری جانسون برای جبرهای باناخ مسیر اصلی نظریه جبرهای باناخ در پنجاه سال گذشته بوده است. با این حال، برای برخی طبقات جبرهای عملیاتی، برخی مفاهیم موازی وجود دارد، که در میان آن ها می‌توان به مفهوم *میانگین پذیری مرکزی* برای جبرهای C^* [L2]، [PR] اشاره کرد. همچنین اخیرا برخی تحقیقات در مورد *میانگین پذیری نسبی* جبرهای باناخ [L1]، [L3] انجام شده است.

در اینجا مفهوم *میانگین پذیری مدول را* برای یک طبقه از جبرهای باناخ شرح می دهیم که به نحوی می تواند به عنوان یک کلیت از همه روش های بالا در نظر گرفته شود. به طور خاص این ایده را برای مشکل ذکر

شده در بالا بکار می بریم و نشان می دهیم که اگر $\ell^1(S)$ به درستی به عنوان یک مدول- $\ell^1(E)$ در نظر گرفته شود، از اینرو میانگین پذیری مدول آن معادل با میانگین پذیری S، یعنی بازگرداندن قضیه جانسون برای مورد نیم گروه های معکوس است.

بخش بعدی به نظریه عمومی میانگین‌پذیری مدول برای جبرهای باناخ اختصاص دارد که ما در آن آنالوگ‌های نتایج کلاسیک در میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را اثبات می‌نماییم. مرجع اصلی ما بخش [P] است، که در اغلب موارد تقریبا اثبات یکسانی اقتباس می‌نماییم. جزئیات اثبات به منظور تکمیل ارائه شده است. در بخش آخر، این نتایج برای اثبات نسخه فوق‌الذکر از قضیه جانسون برای نیم‌گروه‌های معکوس استفاده شده است. ما بر این باوریم که این نظریه به خوبی می تواند در مورد نیم‌گروه‌های توپولوژیک (یا اندازه گیری) برای دستیابی به نتایج میانگین‌پذیری مشابه به کار رود.

2. میانگین‌پذیری مدول

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و A یک مدول باناخ- $\mathfrak{A}$ باشد به طوری که آن یک محصول مشترک داشته باشد که آنرا یک جبر باناخ سازد، منطبق با عملگر مدول در مفهومی است که

$$\alpha.(ab) = (\alpha.a)b, \quad (\alpha\beta).a = \alpha.(\beta.a) \quad (\alpha, \beta \in \mathfrak{A}, a, b \in A)$$

بوده و برای عملگر راست یکسان است.

تعریف 2 .1. A یک مدول میانگین‌پذیر نامیده می‌شود *(به عنوان یک مدول-*$\mathfrak{A}$، اگر ابهام بتواند رخ دهد) اگر برای هر فضای باناخ X که در همان زمان مدول باناخ- A و مدول باناخ- $\mathfrak{A}$با مطابقت عملگرها است

$$(a.x).\alpha = a.(x.\alpha), \quad \alpha.(a.x) = (\alpha.a).x \quad (\alpha \in \mathfrak{A}, a \in A, x \in X)$$

و برای عملگر طرف دیگر یکسان است، و هر عملگر کراندار $D : A \to X^*$ با

$$D(a+b) = D(a) + D(b), D(ab) = a.D(b) + D(a).b \qquad (a, b \in A),$$

و

$$D(\alpha.a) = \alpha.D(a), \quad D(a.\alpha) = D(a).\alpha \qquad (\alpha \in \mathfrak{A}, a \in A),$$

یک $x \in X^*$ وجود دارد به طوری که $D(a) = a.x - x.a =: D_X(a)\ (a \in A)$ باشد. *توجه داشته باشید که D خطی $\mathbb{C}$ فرض نمی‌شود و بنابراین لزوما یک مدول-$\mathfrak{A}$ همریخت نیست.*

توجه داشته باشید که X^* نیز یک مدول باناخ در A و $\mathfrak{A}$ با عملگرهای منطبق تحت عملگرهای متعارف A و $\mathfrak{A}$ است

$$\alpha.(a.f) = (\alpha.a).f \quad (a \in A, f \in X^*, x \in X),$$

و برای عملگرهای سمت راست یکسان است. در اینجا عملگرهای متعارف از A و $\mathfrak{A}$ در X^* توسط رابطه زیر تعریف شده است.

$$(\alpha.f)(x) = f(x.\alpha), \quad (a.f)(x) = f(x.a) \quad (\alpha \in \mathfrak{A}, a \in A, f \in X^*, x \in X),$$

و برای عملگرهای سمت راست یکسان است.

ما یک مدول‌های-A را X ی می‌نامیم که دارای یک عملگر - $\mathfrak{A}$ منطبق مانند، *مدول های-* A– $\mathfrak{A}$ بالا، و مشتق هایی مانند D در تعریف بالا، یعنی *مشتق‌های مدول* است. از این رو اثبات بالا می‌گوید که اگر X یک مدول-A - $\mathfrak{A}$ باشد، پس X^* تحت عملگرهای متعارف است. همچنین ما از نشان‌گذاری $Z_{\mathfrak{A}}(A, X^*)$ برای مجموعه‌ای از همه مشتق‌های مدول $D : A \rightarrow X^*$ و $B_{\mathfrak{A}}(A, X^*)$ برای آن‌هایی که داخلی هستند و $H^1_{\mathfrak{A}}(A, X^*)$ برای گروه خارج قسمت استفاده می‌کنیم (که ما اولین نسبت (برای $\mathfrak{A}$) گروه کوهمولوژی از X^* می نامیم). از این رو A یک مدول میانگین‌پذیر اگر $H^1_{\mathfrak{A}}(A, X^*) = 0$ برای هر مدول-A - $\mathfrak{A}$ در X باشد.

فرضیه بلانکیت: *در هر بخش از این مقاله ما یک مدول A و $\mathfrak{A}$ مانند بالا اثبات می‌نماییم، و از نمادهای X و D برای مدول و مشتق اختیاری مانند تعریف بالا استفاده می نماییم، مگر اینکه آنها به صراحت*

به صورت دیگری مشخص شده باشند.

گزاره 2 .1. *اگر $\mathfrak{A}$ یک همانی تقریبی کراندار داشته باشد، آنگاه میانگین‌پذیری A بر میانگین‌پذیری مدول آن دلالت دارد.*

با قضیه فاکتور کوهن [DW] برای مدول-$\mathfrak{A}$ A و X اثبات نمایید، برای هر A $a \in$، $x \in$ X^* هستند β، $\gamma \in \mathfrak{A}$، $b \in A$ و $y \in X^*$ وجود دارد، به طوری که $a = \beta.b$ و $x = \gamma.y$ است، لذا اگر $\{\alpha i\}$ یک همانی کراندار تقریبی در$\mathfrak{A}$ باشد، پس

$$D(\lambda a) = D(\lambda(\beta.b)) = \lim_i D(\lambda\alpha_i.a) = \lim_i \lambda\alpha_i.D(a) = \lim_i \lambda\alpha_i.(\gamma.y)$$
$$= \lambda(\gamma.y) = \lambda D(a)$$

برای هر $\lambda \in \mathrm{C}$، $a \in A$ است. از این رو D خطی- $\mathbb{C}$ ، و بنابراین داخلی است.

همانگونه که بعداً در بخش 3 خواهیم دید، این بحث نادرست است. از این رو میانگین‌پذیری مدول به نحوی ضعیف تر از میانگین‌پذیری است. در واقع مثال دیگری در بخش 3 نشان می دهد که میانگین‌پذیری مدول حتی به وجود یک همانی تقریبی کراندار دلالت نمی‌کند. با این حال ما نظریه‌های ضعیف تر ی را دنبال می‌کنیم که توسط میانگین‌پذیری مدول درک می شوند.

تعریف 2.2. *تور کراندار $\{ai\}$ جابه جا گر کراندار تقریبی نامیده می‌شود اگر*

$$\lim_i \|a_i a - a a_i\| = 0 \quad (a \in A).$$

بدیهی است هر همانی تقریبی کراندار یک جابه‌جاگر تقریبی کرندار است.

گزاره 2.2. *اگر A یک میانگین‌پذیر مدول باشد، پس یک جابه‌جاگر کراندار تقریبی* دارد.

اثبات. فرض کنید $X = A^*$. پس X و X^* A- $\mathfrak{A}$-مدولی تحت عملگر متعارف هستند

$$(a.f)(b) = f(ba), (\alpha.f)(b) = f(b.\alpha) \quad (a, b \in A, \alpha \in \mathfrak{A}, f \in A^*),$$

و

$$(a.F)(f) = F(f.a), (\alpha.F)(f) = F(f.\alpha) \quad (a \in A, \alpha \in \mathfrak{A}, f \in A^*, F \in A^{**}),$$

که با عملگرهای سمت راست به طور مشابه تعریف شده اند. اکنون جایگیری متعارف $\theta: A \to A^{**}$ را در نظر بگیرید، از اینرو بدیهی است $\theta \epsilon Z_{\mathfrak{A}}(A, X^*)$، بنابراین $x \in A^{**}$ به طوری که $a.x - x.a$ ($a \in A$) $\theta(a) =$ است. هر تور (توسط C) کراندار محدود $\{a_i\}$ در A را در نظر بگیرید که بنابرآن $\theta(a_i) \to x$ در $\sigma(A^{**}, A^*)$ می‌باشد، پس به سهولت می‌توان دید که برای هر $a \in A$ در $\sigma(A, A^*)$، $a_i a - a a_i \to 0$ است. از این رو با توجه به $\epsilon > 0$ و زیر مجموعه‌ی متناهی $F \subseteq A$ ، یک ترکیب محدب $aF_{,\epsilon}$ از عناصر F وجود دارد ، که یک تابع کراندار نرم‌دار توسط C *است*، به طوری که برای هر $a \in F$، $\|aF_{,\epsilon} - aaF_{,\epsilon}\| < \epsilon$ است. پس $\{aF_{,\epsilon}\}_{\{F,\epsilon\}}$ یک جابه‌جاگر تقریبی کراندار برای A *تشکیل می‌دهد*.

با توجه به $\mathfrak{A}$ -مدولی AوB، اگر $A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B$ محصول تانسور مدول پروژکتیو A و $B[R]$ است. این خارج قسمت محصول تانسور پروژکتیو معمول $A\widehat{\otimes}A$ توسط ایده‌آل محصور I تولید شده توسط عناصر فرم $z.a\otimes b - a \otimes z.a$ برای $z \in \mathfrak{A}$، $a, b \in A$ است. اگر AوB جبرباناخ با عملگر همساز باشد، پس بنابراین $A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B$است. همچنین $\left(A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B\right)^* \cong \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}(B, A^*)$، جایی که طرف سمت راست فضای همه مورفیسم $\mathfrak{A}$-مدولی از B و $A^*[R]$ است. مخصوصاً $A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A$ ، A- $\mathfrak{A}$-مدولی باناخ است. در اینجاA دوم در محصول تانسور همراه با یک محصول معکوس درک می شود. فرض کنید,$A\omega \in \mathfrak{L}(A\widehat{\otimes}A)$ توسط $\omega(a\otimes b) =$ $ab (a, b \in A)$ تعریف می‌شود. پس هم ω و هم مزدوج دوگان آن $\omega^{**} \in \mathfrak{L}(A\widehat{\otimes}A)^{**}, A^{**}$ همریختی جبر باناخ هستند.اکنون همانگونه که I یک ایده آل $A\widehat{\otimes}A$ است، بنابراین $\omega(I)$ ایده‌آل A است، و اگر J بستار $\omega(I)$ باشد ما می‌توانیم $\tilde{\omega}: A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A = A\widehat{\otimes}A/I \to A/J$ توسط رابطه زیر تعریف نماییم:

$$\tilde{\omega}(a \otimes b + I) = ab + J \quad (a, b \in A).$$

این رابطه به یک عنصر $\widetilde{\omega} \in \mathfrak{L}(A\otimes_{\mathfrak{A}}A, A/J)$ تعمیم می‌دهیم و هم $\widetilde{\omega}$ و هم مزدوج دوگان آن $\widetilde{\omega}^{**} \in \mathfrak{L}((A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^{**}, A^{**}/J^{\perp\perp})$ همریختی‌های $\mathfrak{A} - A$ مدولی هستند.

تعریف 2. 3. یک تور کراندار $\{\tilde{u}i\}$ در $A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A$ یک قطر تقریبی مدول نامیده می شود اگر $\widetilde{\omega}(\tilde{u}_i)$ یک همانی تقریبی (کماندار) از A/J بوده و $lim_i\|\tilde{u}_i.a - a.\tilde{u}_i\| = 0(a \in A)$ باشد. یک عنصر $\widetilde{M} \in (A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^{**}$ قطر مجازی مدول نامیده می شود، اگر رابطه زیر برقرار باشد.

$$\tilde{\omega}^{**}(\tilde{M}).a = a, \quad \tilde{M}.a = a.\tilde{M} \quad (a \in A).$$

فرضیه 2. 3 دو عبارت زیر برابر هستند:

(i) A یک مدول قطری مجازی دارد.

(ii) رابطه $M \in (A\widehat{\otimes}A)$ وجود دارد، چنان که

$$\omega^{**}(M).a - a \in J^{\perp\perp}, \quad M.a - a.M \in I^{\perp\perp} \quad (a \in A),$$

جایی که I ایده‌آل محصور $A\widehat{\otimes}A$ تولید شده توسط عناصر فرم $z\otimes b - a\otimes z.a$ برای $z \in \mathfrak{A}$، $a, b \in A$ و $J = \omega(I)$است.

به خصوص اگر A یک قطر مجازی داشته باشد، پس یک مدول قطری مجازی دارد.

اثبات. اگر M همانند عبارت (ii) باشد، $\widetilde{M} \in (A\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^{**} = (A\hat{\otimes}A)^{**}/I^{\perp\perp}$ توسط $\widetilde{M} = M + I^{\perp\perp}$ را تعریف نمایید. پس با توجه به $a \in A$، چون $M.a = a.M \in I^{\perp\perp}$ بدیهی است $\widetilde{M}.a = a.\widetilde{M}$، و چون $\omega^{**}(M).a - a \in J^{\perp\perp}$ و $\omega^{**}(\widetilde{M}) = \omega^{**}(M + I^{\perp\perp}) = \omega^{**}(M) + J^{\perp\perp}$ بدیهی است $\omega^{**}(\widetilde{M}).a = a$.

بالعکس اگر $\widetilde{M}$ یک مدول قطری مجازی باشد، پس هر $M \in (A\hat{\otimes}A)^{**}$ چنانکه $\widetilde{M} = M + I^{\perp\perp}$ باشد. پس با توجه به $a \in A$، $M.a - a + I^{\perp\perp} = \widetilde{M}.a - a.\widetilde{M} = 0 \in (A\hat{\otimes}A)^{**}/I^{\perp\perp}$ بنابراین

$\mathrm{M.a-a.M} \in \mathrm{I}^{\perp\perp}$، همچنین $\omega^{**}(\mathrm{M}).\mathrm{a}-\mathrm{a}+\mathrm{J}^{\perp\perp}=\omega^{**}(\mathrm{M}).\mathrm{a}-\mathrm{a}=0 \in \mathrm{A}^{**}/\mathrm{J}^{\perp\perp}$

بنابراین $\omega^{**}(\mathrm{M}).\mathrm{a}-\mathrm{a} \in \mathrm{J}^{\perp\perp}$ است.

در بخش زیر به طور مشابه ثابت شده است.

گزاره 2. 4. دو عبارت زیر یکسان هستند:

(i) A یک مدول قطری مجازی دارد.

(ii) یک تور کراندار $\{u_i\} \in A\widehat{\otimes}A$ وجود دارد، چنانکه برای هر $a \in A$ تورهای $\{\omega(u_i).a-a\}$ و $\{u_i.a-a.u_i\}$به ترتیب یک عنصر J وI نزدیک می شوند.

به خصوص اگر A یک قطر تقریبی داشته باشد، پس آن یک قطر تقریبی مدول دارد.

گزاره فرعی 2. 1. با توجه به مطالب فوق:

(*i*) اگر *A* تابعی یکدار با واحد *e* باشد، پس $H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A},\mathrm{X}) \cong H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A},\mathrm{eXe})$

(*ii*) $H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A}\oplus\mathfrak{A},\mathrm{X}) \cong H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A},\mathrm{X})$،

(*iii*) اگر *A* یک همانی کراندار تقریبی داشته باشد، پس $H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A},\mathrm{X}^*) \cong H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A},(\mathrm{A},\mathrm{X}A)^*)$

(*iv*) اگر $\mathfrak{A}$یک همانی کراندار تقریبی داشته باشد، پس$H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A},\mathrm{X}^*) \cong H^1_{\mathfrak{A}}(\mathrm{A},(\mathfrak{A},X\mathfrak{A})^*)$

اثبات (*i*). *فرض کنید همریختی* A- $\mathfrak{A}$-مدولی $r.\ell, id : X \to X$ توسط $id(x)=x, \ell(x)=x.e$ تعریف می شود. بنابراین با تصویر جابه جایی دوگان به صورت زیر است.

$$X \cong eXe \oplus (id-r)\circ\ell(X) \oplus (id-\ell)\circ r(X) \oplus (id-r)\circ(id-\ell)(X),$$

اکنون بررسی اینکه هر جمع‌وند از طرف سمت راست یک A- $\mathfrak{A}$-مدولی باناخ است و اینکه اولین گروه‌های کوهمولوژی نسبی به عبارت آخر به صفر می‌رسند، آسان می‌باشد.

(ii) بدیهی است Xیک $(A\oplus\mathfrak{A})$- $\mathfrak{A}$-مدول است. فرض کنید D هر مشتق مدول از A- $\mathfrak{A}$-مدولی از $A\oplus\mathfrak{A}$ تا X باشد، پس تحت تعریف $\mathfrak{A} \cong \{0\}\oplus\mathfrak{A}$, برای هر $a \in A$ و $a,b \in \mathfrak{A}$ داریم،

$$(a,\beta).D(0,\alpha)=D((a,\beta).(0,\alpha))-D((a,\beta)).\alpha=D((a,\beta).\alpha)-D((a,\beta)).\alpha=0.$$

از اینرو $D\circ\theta$ یک مشتق مدول از A تا X خواهد بود، برای جایگیری متعارف $\theta : A \to A \oplus \mathfrak{A}$ است.

درک اینکه $D \mapsto D\circ\theta$ به یک همریخت گروه‌های کوهمولوژی نسبتاً نظیر ارتقا می‌یابد، آسان می‌باشد.

(iii) اگر $X_1 = AXA$ و $X_2 = A$. همانگونه که Aدر بردارنده یک همانی کراندار تقریبی $\{a_i\}$ است، گزاره‌ی تجزیه کوهن نشان می‌دهد که X_1 و X_2 مدول‌های -A - $\mathfrak{A}$ هستند. اکنون A یک عملگر چپ صفر در $(X/X_2)^* \cong X_2^{\perp}$ دارد، بنابراین $H^1_{\mathfrak{A}}(A,X_2^{\perp})=0$ است. همچنین $\{a_i\}$ یک تور کراندار در$(X\widehat{\otimes}_{\mathfrak{A}}X^*)^* \cong \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}(X^*)$ است، بنابراین به یک زیرتور عبور می‌کند که ما فرض می‌کنیم ω^*-همگرا به برخی توابع $F \in \mathfrak{L}(X^*)$ است. پس برای هر $a \in A$، $f \in X^*$، $x \in X$ داریم.

$$<a.x,F(f)>=\lim_i <a.x,f.a_i>=\lim_i <a_i a.x,f>=<a.x,f>,$$

از اینرو $I-F$ تصویری از X^* بر $X^{\perp}$است، جایی که I نگاشت همانی در X^* است. بنابراین $X^* \cong X_2 \oplus X_2^{\perp}$ و بنابراین $H^1_{\mathfrak{A}}(A,X^*) \cong H^1_{\mathfrak{A}}(A,X_2^*)$است. حال $H^1_{\mathfrak{A}}(A,X_1^*) \cong H^1_{\mathfrak{A}}(A,X_2^*)$ مشابه است.

اثبات (iv) کاملا مشابه اثبات (iii) است.

قضیه2. 1. عبارات زیر برابر هستند

(i) A یک مدول میانگین‌پذیر است.

(ii) A یک قطر تقریبی مدول دارد.

(iii) A یک قطر مجازی مدول دارد.

اثبات. برابری رابطه (ii) و (iii)دقیقا شبیه مورد کلاسیک (P، قاعده فرعی 1. 6) می‌باشد. فرض کنید که A یک قطر مجازی مدول $\tilde{M} \in (A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^{**}$ دارد و فرض کنید که

$M \in (A\hat{\otimes}A)^{**}$ عنصر نظیر مانند عبارت (ii)در گزاره 2. 3 باشد. ما می‌توانیم فرض کنیم که $\tilde{M}$ یک نقطه ω^*-محدود از قطر تقریبی مدول$\{\tilde{u}_i\}$ است. فرض کنید هر A- $\mathfrak{A}$-مدولیX و هر مشتق مدول $D : A \to X^*$ است. با استفاده از قضیه فرعی بالا، می توانیم فرض نماییم که X ضروری است، یعنی X=AXA. برای هر x ∈ X، در اینجا نظیر $F_x \in (A\hat{\otimes}A)^*$ از طریق رابطه زیر برای هر a $\in A$، $x \in X$ است،

$$F_x(a \otimes b) =< x, a.D(b) > \quad (a, b \in A).$$

پس $D(a).x$ می تواند به عنوان یک عنصر از تابع A^* بواسطه رابطه زیر تصور شود،

$$< D(a).x, b >=< D(a), b.x > \quad (b \in A),$$

و به سهولت می‌توان دید که

$$F_{(a.x-x.a)} = a.F_x - F_x.a + \omega^*(D(a).x) \quad (a \in A, x \in X),$$

(اثبات (گزاره 1. 7) را ببینید). با قرار دادن $\tilde{F}_x = F_x + I^\perp$ و $(x \in X)$ $f(x) =< F_x, M >$ داریم $\tilde{F}_x \in (A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}A)^*$ و $f \in X^*$. به آسانی می توان بررسی کرد که

$$\tilde{F}_{(a.x-x.a)} = a.\tilde{F}_x - \tilde{F}_x.a + \tilde{\omega}^*(D(a).x + J^\perp) \quad (a \in A, x \in X),$$

و همچنین

$$\begin{aligned}
< x, D_f(a) > &=< \tilde{F}_{(a.x-x.a)}, \tilde{M} > \\
&=< a.\tilde{F}_x - \tilde{F}_x.a, \tilde{M} > + < \tilde{\omega}^*(D(a).x + J^\perp), \tilde{M} > \\
&=< \tilde{F}_x, \tilde{M}.a - a.\tilde{M} > + \lim_i < x.\tilde{\omega}(\tilde{u}_i), D(a) >=< x, D(a) >,
\end{aligned}$$

جایی که آخرین برابری به خاطر ضروری بودن X است. از اینرو $D = D_f$. بالعکس فرض نمایید که A یک مدول میانگین‌پذیر است، پس با استفاده از گزاره2. 2، آن یک همانی تقریبی

کراندار $\{ai\}$ دارد. $\dot{a}i = ai + J \in A/J$ قرار دهید، پس با عبور از یک زیرتور، می‌توانیم

فرض نماییم که $\dot{a}i = ai + J \in A/J$ همگرای-w^* برای عنصر $N \in$

$(A\hat{\otimes} AA)^{**}$ است. بدیهی است $\tilde{\omega}$ در طیف DN کمتر می‌شود و بنابراین DN می‌توان به

عنوان مدول میانگین‌پذیر A در A-$\mathfrak{A}$-مدولی $K = ker(\tilde{\omega}^{**})$ مورد بررسی قرار گیرد.

با میانگین‌پذیری مدول A، $N' \in K$ وجود دارد، چنانکه $D_N = D_{N'}$ ، پس $M = N - N'$

یک مدول قطری مجازی است.

گزاره 2. 5. اگر A و B جبر *باناخ و* $\mathfrak{A}$-مدولی باناخ با عملگرهای سازگار باشند، و

یک همریختی جبرباناخ پیوسته و همریختی مدول ϕ از A به یک زیرتور متراکم B

وجود داشته باشد، A و همچنین B مدول میانگین‌پذیر خواهند بود.

اثبات. اگر X هر $B - \mathfrak{A}$—مدولی باشد، پس بواسطه ϕ، X می‌تواند به عنوان یک A-$\mathfrak{A}$-

مدولی مورد بررسی قرار گیرد، و هر مشتق مدول $D : B \to X^*$، یک مشتق مدول

$D \circ \varphi : A \to X^*$ به دست می‌دهد که درونی است. بواسطه تراکم طیف ϕ و پیوستگی D، D

نیز درونی خواهد بود.

سپس فرض کنید که A یک همانی تقریبی کراندار ai دارد و در نظر داشته باشد که جبر $\mathfrak{A}$-

مدولی از A به صورت زیر است:

$$M_{\mathfrak{A}}(A) = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2 \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}(A) : T_1(ab) = T_1(a)b, T_2(ab) = aT_2(b)\ (a, b \in A)\}.$$

پس $M_{\mathfrak{A}}(A)$ یک A-$\mathfrak{A}$-مدولی و A در $M_{\mathfrak{A}}(A)$ از طریق $M_{\mathfrak{A}}(A)$ via $a \mapsto (S_a, T_a)$ قرار

گرفته، جایی که $S_a(b) = ab, T_a(b) = ba \quad (a, b \in A)$. برای هر عنصر $T = (T_1, T_2)$

از $M_{\mathfrak{A}}(A)$، به سهولت می‌توان دید که $\|T_1\| = \|T_2\|$ و اگر ما $\|T\|$ را برابر با این مقدار معمول قرار

دهیم، پس $M_{\mathfrak{A}}(A)$ A -$\mathfrak{A}$ -مدولی باناخ می شود. همچنین برای هر A- $\mathfrak{A}$-مدولی X، $M_{\mathfrak{A}}(A)$ در X از طریق رابطه زیر عمل می‌کند.

$$T.x = \lim_i T_1(a_i).x, \quad x.T = \lim_i x.T_2(a_i) \qquad (x \in X, T = (T_1, T_2) \in M_{\mathfrak{A}}(A)),$$

که X را یک $M_{\mathfrak{A}}(A)$ -$\mathfrak{A}$ مدولی می سازد. همچنین با توجه به یک مشتق مدولی X^* $D : M_{\mathfrak{A}}(A) \to$، حد D' از D تا A یک مشتق مدول بر A است.

گزاره 2. 6. با توجه به موارد فوق، اگر A یک همانی تقریبی کراندار داشته باشد، پس $H^1_{\mathfrak{A}}(M_{\mathfrak{A}}(A), X^*) \cong H^1_{\mathfrak{A}}(A, X^*)$ است.

اثبات. کافی است که نشان دهیم اگر طرف سمت راست {0} است، پس طرف سمت چپ نیز چنین است. اگر D و D’ مانند بالا باشند، پس برای برخی $x \in X^*$، $D' = D_x$ است. برای هر شاخص i مقدار $D_i = T_1(a_i).x - x.T_2(a_i)$ را قرار دهید، و $T = (T_1, T_2) \in M_{\mathfrak{A}}(A)$، پس تور Di نرم کراندار بدون فرم است. و بنابراین با عبور به یک زیرتور، ما می توانیم فرض کنیم که آن با برخی $D_0 \in \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}(M_{\mathfrak{A}}(A), X^*)$ در $\sigma(X^*, M_{\mathfrak{A}}(A))$ همگرا است. . پس به سهولت می‌توان نشان داد که $D0 = D$ و چون بدیهی است $D0 = Dx$ در A، بنابراین با پیوستگی این مشتقات در توپولوژی صریح $M_{\mathfrak{A}}(A)$ و تراکم A در $M_{\mathfrak{A}}(A)$ در توپولوژی صریح، ما به دست می آوریم که در $M_{\mathfrak{A}}(A)$، $D = Dx$ است.

استنباط 2 .1 . فرض کنید که J ایده‌ال بسته Aباشد که $\mathfrak{A}$-پایا است، یعنی $\mathfrak{A}.J \subseteq J$. اگر Jهمانی تقریبی کراندار داشته باشدو A یک مدول میانگین‌پذیر باشد، پس J یک مدول میانگین‌پذیر

است.

اثبات. فرض کنیدX یک باناخ ضروری $\mathfrak{A}-J$ مدولی و $D: M_{\mathfrak{A}}(J) \to X^*$ یک مشتق مدول کراندار باشد. با تعریف $M_{\mathfrak{A}}(J)$، یک $\mathfrak{A}$ -مدول همریخت $\varphi: A \to M_{\mathfrak{A}}(J)$ و $D \circ \varphi$ یک مشتق مدول در A است، بنابراین درونی است. از اینرو D در J درونی است. در بحثی شبیه بحث فوق D در $M_{\mathfrak{A}}(J)$ درونی است و بنابراین نتیجه از گزاره فوق تبعیت می‌کند.

استنباط2. 2. اگر J یک ایده‌آل بسته $\mathfrak{A}$- ناوردا از A با همانی تقریبی کراندار باشد، پس A یک مدول میانگین‌پذیر است اگر هم Aو هم A/J مدول میانگین‌پذیر باشند.

اثبات. یک راهنمای جزئی برای دیگری این است که، فرض نمایید هم Aو هم A/J مدول میانگین‌پذیر باشند و $D: A \to X^*$ هر مشتق مدول کرنداری باشد، پس محدودیت D' از Dبه J درونی است. فهم این موضوع آسان است که دامنه D'-D هم در JX و هم XJ کم می شود. اکنون مدول بسته XJ از X که توسط $JX \cup XJ$ ایجاده شده یک A- $\mathfrak{A}$-مدولی باناخ است و $D - D^{'}: A \to \hat{X}_J \cong (X/X_J)^*$ مشتق مدولی است که در Jکم می‌شود، بنابراین می‌تواند به عنوان یک مشتق مدول در A/J در نظر گرفته شود، و بنابراین درونی است. از اینرو D نیز درونی است.

تعریف2. 4. **با توجه به یک تور جبری باناخ و** $\mathfrak{A}$-مدولی $\{Ai\}$ با عملگرهای هنطبق، میتوان گفت که آنها به طور همزمان مدول میانگین‌پذیر هستند، اگر یک ثابت $c > 0$ وجود داشته باشد که برای هر شاخص $i,$ هر Ai - $\mathfrak{A}$-مدولیXi ، هر مشتق مدول $D_i: A_i \to X_i^*$، یک $xi \in X^*$ وجود داشته باشد، چنانکه $Di = Dx$ و $\|x_i\| \leq c\|D_i\|$ باشد.

گزاره2. **7**. اگر یک سیستم مستقیم $\{Ai\}$ به طور همزمان یک مدول میانگین‌پذیر باشد.پس

$A := \varinjlim A_i$ یک مدول میانگین‌پذیر است.

اثبات. *می توان فرض کرد که* $(i \leq i) \quad A_i \subseteq A_i \subseteq A$ و $A = (\cup_i A_i)^{-}.$ *است. فرض کنید* X یک A- $\mathfrak{A}$-مدولی باناخ باشد و $D : A \to X^*$ یک مشتق مدول کراندار، پس محدوده D_i از D تا A_i یک مشتق مدول در A_i است، بنابراین $0 < C$ وجود *دارد* و $z_i \in X^*$ می باشد، به طوری که در A_i و $\|z_i\| \leq c\|D\|$، $D = D_{z_i}$ است. با برگشت به یک زیرتور می توان فرض کرد که $\{z_i\}$ با برخی $z \in X^*$، یک w^*- همگرا است. با فرض هر $a \in \cup_i A_i$، پس برای برخی شاخص‌های i_0 $\quad (i > i_0) \quad a \in A_i$ می شود، بنابراین

$$
\begin{aligned}
< D_z(a), x > =< z, x.a - a.x >= \lim_i < x.a - a.x, z_i > \\
= \lim_i < D_{z_i}(a), x >=< D(a), x > \quad (a \in A, x \in X^*),
\end{aligned}
$$

بنابراین در زیر مجموعه متراکم A و بنابراین در A ، $D = D_z$ است.سپس میانگین‌پذیری مدول محصول مدول تانسور را بررسی می‌کنیم.

گزاره 2. 8. *اگر* A و B مدول میانگین‌پذیر باشند، *بنابراین* $A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B$ است.

اثبات. A و B همانی تقریبی کراندار توسط گزاره 2.2 را می‌پذیرند، به طوری $A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B$ می‌شود. هر باناخ ضروری را $A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B$ - $\mathfrak{A}$-مدولی X فرض کنید. نگاشت $a \mapsto \sigma_a$ و $b \mapsto \tau_b$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\sigma_a(c \otimes d) = ac \otimes d, \quad \tau_b(c \otimes d) = c \otimes bd \quad (a, c \in A, b, d \in B),$$

این نگاشت‌ها گسترش یافته و سپس به جبر باناخ همریختی پیوسته و همریخت‌های $\mathfrak{A}$-مدولی A و B بر برجبرهای بسته $A1$ و $B1$ از $M_{\mathfrak{A}}(A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B)$ تبدیل می شوند و پس X یک باناخ $A1$-$\mathfrak{A}$ -مدولی و

$B1$- $\mathfrak{A}$-مدولی است. اکنون هر مشتق مدول $D : A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B \to X^*$ به برخی مشتق های مدول D´ :

$M_{\mathfrak{A}}(A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B) \to X^*$ ارتقا می یابد، که محدودیت $D1$ به B1 آن درونی است، یعنی برای برخی x

$\in X^*$، $D' = D_x$ است. فرض کنید $d : X \to \mathfrak{L}_{\mathfrak{A}}(B_1, X)$، که هر $y \in X$ را به

محدوده Dy به $B1$ می‌فرستد. پس این واقعیت که $D' = D_x$ در $B1$ صفر است، به این امر

دلالت دارد که $D' = D_x$ فرستنده $A1$ بر $Im(d)^{\perp} \cong (X/Im(d))^*$ است(به خاطر

تبدیل σ وτ)، اکنون $Im(d)$ و بنابراین $Y := X/Im(d)$ یک $A1$-$\mathfrak{A}$-مدولی است(دوباره به خاطر

تبدیل σ وτ) و بنابراین در $A1$، برای برخی $y \in Y$ ، $D' - D_x = D_y$ است.اما هر دو

طرف آخرین تساوی در $B1$ برابر صفر است، و بنابراین با این واقعیت که در

$M_{\mathfrak{A}}(A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B)$، $A1 \cup B1$ متراکم است، D' در $A1 \cup B1$ ، و D در $A\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}B$ درونی

است.

گزاره 2. 9. اگر $\mathfrak{A}$ یکدار باشد و B یک جبر باناخ یکدار میانگین پذیر باشد، پس $A := B\hat{\otimes}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}$

یک مدول میانگین پذیر است. به خصوص اگر $\mathfrak{A}$ یکدار باشد، پس به عنوان یک مدول بر خود یک مدول

میانگین‌پذیر است.

اثبات. هنگامی که $\mathfrak{A}$ و B یکدار هستند، B و $\mathfrak{A}$ می‌توانند با جبر فرعی A تعریف شوند. با توجه به A-

$\mathfrak{A}$ مدولی X، و مشتق مدول میانگین‌پذیر $D : A \to X^*$، X یک B -$\mathfrak{A}$ مدولی نیز هست و

محدوده $D1$ از D به B یک مشتق مدول است. همانگونه که B یکدار است، D مشتق و بنابراین

درونی است. همچنین بوضوح محدوده $D2$ از D تا -$\mathfrak{A}$ نگاشت صفر است (هنگاامی‌که $\mathfrak{A}$ یکدار

باشد). اکنون برای هر $b \in B$، $a \in$ A، داریم

$$D(b \otimes \alpha) = (1 \otimes \alpha)D_1(b) + D_2(\alpha).b = (1 \otimes \alpha)(b.x - x.b) + 0$$
$$= (b \otimes \alpha).x - x.(b \otimes \alpha) = D_x(b \otimes \alpha).$$

اکنون همانگونه که $\mathfrak{A}$ یکدار است، D نیز در واقع خطی است. از اینرو در $B\hat{\otimes}\mathfrak{A}$، $D = Dx$ است.

با استفاده از این نتیجه می‌توان یک مجموعه از مثال‌های جبرهای باناخ مدول میانگین‌پذیر ارائه داد. برخی در اینجا ذکر شده اند:

مثال2. 1. (i) اگر Ω یک فضای توپولوژیک فشرده باشد، پس $C(\Omega, \mathfrak{A}) \cong C(\Omega)\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ یک مدول میانگین‌پذیر است.

(ii) اگر $\mathfrak{H}$ یک فضای هیلبرت مجزا باشد، پس $(\mathfrak{K}(\mathfrak{H}) \oplus \mathbb{C}I)\hat{\otimes}\mathfrak{A} \cong (\mathfrak{K}(\mathfrak{H})\hat{\otimes}\mathfrak{A}) \oplus \mathfrak{A}$ مدول میانگین‌پذیر است.

(iii) اگر G یک گروه میانگین‌پذیر ناپیوسته است، پس $\ell^1(G)\hat{\otimes}\mathfrak{A}$ مدول میانگین‌پذیر است، به خصوص برای $\mathfrak{A} = \ell^1(H)$ جایی که H یک گروه فرعی از G باشد، $\ell^1(G \times H)$ به عنوان $\ell^1(H)$ مدولی، مدول میانگین‌پذیر است.

3. مدول میانگین‌پذیر جبرهای نیم‌گروهی

در این بخش به یک مثال مهم می‌پردازیم که درواقع انگیزه نوشتن این مقاله است. ما یک نیمگروه معکوس S با خودتوان E را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که $\ell^1(S)$ یک مدول میانگین‌پذیر به عنوان یک $\ell^1(E)$-مدولی است اگر و تنها اگر S میانگین‌پذیر باشد.

تعریف3. 1. نیگروه مجزای S یک نیمگروه معکوس نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in S$ یک عنصر واحد $x^* \in S$ وجود داشته باشد، چنانکه $x = xx^* x$ و $x^* = xx^* x^*$ باشد، و عنصر

$e \in S$ یک خودتوان نامیده می شود اگر $e = e^* = e^2$ باشد. محموعه عناصر خودتوان S توسط E مشخص می شوند.

تعریف3. 2. یک نیمگروه ناپیوسته S میانگین‌پذیر نامیده می شود اگر یک میانگین ناوردا $\ell^\infty(S)$، وجود داشته باشد، یعنی یک عنصر $m \in \ell^\infty(S)^*$ چنانکه $m(1) = \|m\| = 1$ و $m(s.f) = m(f.s) = m(f) \quad (s \in S, f \in \ell^\infty(S))$ باشد، جایی که

$$f.s(t) = f(ts), \quad s.f(t) = f(st) \quad (s, t \in S, f \in \ell^\infty(S)).$$

درک این موضوع آسان است که E درواقع یک نیمگروه فرعی جابه جایی‌پذیر S است. به خصوص $\ell^1(E)$ می تواند به عنوان یک جبرفرعی $\ell^1(S)$ در نظر گرفته شود، و از این رو $\ell^1(S)$ یک جبر باناخ و یک باناخ $\ell^1(E)$ مدول با عملگر همساز است. به طور مشابه این امر در مورد $\ell^\infty(S)$ نیز صدق می کند. البته ممکن است عملگر $\ell^1(E)$ بر $\ell^1(S)$ برای متفاوت ساختن نتایج میانگین پذیری مدول تغییر داده شود. درسی که ما از اثبات گزاره 2. 2 گرفتیم ین است که گاهی بررسی یک عملگر از یک سو برای برخی از انواع عملگرهای جزئی (عملگر صفر در این مورد) مفید است. ما این ایده را اینجا اقتباس می نماییم و فرض می کنیم که $\ell^1(E)$ از سمت راست بر $\ell^1(S)$ توسط چندعملگر و به عنوان همانی از سمت چپ عمل می نماید، یعنی

$$\delta_e.\delta_s = \delta_s, \ \delta_s.\delta_e = \delta_s e = \delta_s * \delta_e \quad (s \in S, e \in E).$$

استنباط3. 1. با توجه به مفهوم فوق $(i) \ \ell^1(S)\hat{\otimes}_{\ell^1(E)}\ell^1(S) \cong \ell^1(S \times S)/I$ ، جایی که I ایده‌آل بسته $\ell^1(S \times S)$ است که محدوده خطی بسته‌ی مجموعه‌ای از عناصر از

$\delta_{(set,x)} - \delta_{(st,x)}$ می باشد، جایی که $s, t, x \in S \;\; and \; e \in E$ است.

$(ii)(\ell^1(S)\hat{\otimes}_{\ell^1(E)}\ell^1(S))^* \cong \ell^\infty(S \times S)/I^\perp$ ، جایی که

$$I^\perp = \{f \in \ell^\infty(S \times S) : f(set, x) = f(st, x) \quad (s, t, x \in S, e \in E)\}$$

اثبات. (i) مستقیماً از تعریف محصول تناسور پروژکتور مدول تبعیت می‌کند. برای (ii)، اگر $f \in I^\perp$ باشد، پس برای هر $s, t, x \in S$ و $e \in E$، داریم

$$0 =< f, \delta_{(set,x)} - \delta_{(st,x)} >= \sum_{u,v} f(u, v)(\delta_{(set,x)}(u, v) - \delta_{(st,x)}(u, v))$$
$$= f(set, x) - f(st, x).$$

بالعکس، اگر f رابطه داده شده را برآورده سازد، پس به وضوح $< f, u >= 0$ است، برای هر $u \in I$ که یک ترکیب خطی محدود عناصر از $\delta_{(set,x)} - \delta_{(st,x)}$ است، جایی که $s, t, x \in S$ و $e \in E$ است، با پیوستگی، پس $f \in I^\perp$ است.

فرض کنید $\omega : \ell^1(S)\hat{\otimes}\ell^1(S) = \ell^1(S \times S) \to \ell^1(S)$ توسط

$$\omega(g)(s, t) = g(st) \quad (s, t \in S, g \in \ell^1(S)),$$

تعریف شود، پس

$$\omega^*(h)(s, t) = h(st) \quad (s, t \in S, h \in \ell^\infty(S)).$$

اکنون اگر

$$f.s(t, t') = f(st, t') \quad s.f(t, t') = f(t, t's) \quad (s, t, t' \in S, f \in \ell^\infty(S \times S)),$$

و برای $M \in \ell^\infty(S\times S)^{**}$ and $f \in \ell^\infty(S\times S),$

$$M.s(f) = M(s.f), \quad s.M(f) = M(f.s),$$

پس M یک قطر مجازی $\ell^1(S)$ است، اگر و تنها اگر، برای هر $s \in S$ داشته باشیم،

$$M.s = s.M, \quad \omega^{**}(M).s = s,$$

در $\ell^\infty(S\times S)$، جایی که در دومین برابری سمت چپ توسط رابطه زیر تعریف شده

$$\omega^{**}(M).s(h) = M(s.(\omega^*(h))) \quad (s \in S, h \in \ell^\infty(S)),$$

و سمت راست تابع ارزیابی در s بر $\ell^\infty(S))$ است[DN]. اکنون اگر I همانند استنباط بالا باشد و $J = \omega(I)^-$، پس بواسطه گزاره 2.3 $M \in \ell^1(S\times S)^{**} = \ell^\infty(S\times S)^*$ به یک قطر مجازی مدول برای $\ell^1(S)$ ارتقا می یابد، اگر و تنها اگر ، برای هر $s \in S$ این تساوی‌ها به صورت زیر می شود

$$M.s = s.M, \quad \omega^{**}(M).s = s,$$

ادامه دهید، به ترتیب $I^\perp \subseteq \ell^\infty(S\times S)$ و $J^\perp = \omega(I)^\perp \subseteq \ell^\infty(S)$، جایی که

$$J^\perp = \omega(I)^\perp = \{h \in \ell^\infty(S) : h(set) = h(st) \quad (s,t \in S, e \in E)\}.$$

همچنین یک عنصر M وجود دارد اگر و تنها اگر $\ell^1(S)$ یک مدول میانگین‌پذیر باشد.

سپس یک رابطه تجانس $\backsim$ بر S تعریف شده توسط $s \backsim t$ اگر و تنها اگر یک $e \in E$ و جود داشته باشد، در نظر بگیرید، چنانکه $se = te$. خارج قسمت نیمگروه $G_S := S/\backsim$ سپس یک گروه است. آن در واقع تصویر همریخت گروه بیشینه از[Mu] S است. همچنین نیمگروه معکوس S میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر گروه ناپیوسته G_S میانگین‌پذیر باشد[DN].

استنباط 3. 2. با توجه به مفاهیم فوق، $\ell^1(GS)$ خارج قسمت $\ell^1(S)$ است و تنها عملگر فوق از $\ell^1(E)$ بر $\ell^1(S)$ به یک عملگر $\ell^1(E)$ بر $\ell^1(GS)$ ارتقا می یابدو آنرا یک باناخ $\ell^1(E)$-مدول می سازد.

اثبات. فرض کنید نگاشت خارج قسمت $\pi : S \to G_S$، پس با عمومیت دادن π توسط خطی بودن و ذکر اینکه برای هر $n \geq 1$، هر $c1, \ldots, cn \in \mathbb{C}$ و هر $s1, \ldots, sn \in S$ داریم

$$\| \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{\pi(s_i)} \|_1 = \| \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{s_i} \|_1$$

می توان π را به یک جبر باناخ پیوسته همریخت $\pi : \ell^1(S) \to \ell^1(G_S)$ تعمیم داد.

استنباط 3. 3. با توجه به ساختار استنباط فوق، $\ell^1(GS)$ یک مدول میانگین‌پذیر است، اگر و تنها اگر آن میانگین‌پذیر باشد.

اثبات. عملگر سمت چپ $\ell^1(E)$ بر $\ell^1(S)$ و ازاینرو $\ell^1(GS)$ ناچیز است. همانگونه که برای عملگر سمت راست داریم

$$\delta_{\pi(s)}.\delta_e = \delta_{\pi(se)} = \delta_{\pi(s)} \quad (s \in S, e \in E).$$

بنابراین عملگر سمت راست هم ناچیز است و بنابراین

$$\ell^1(G_S)\hat{\otimes}_{\ell^1(E)}\ell^1(G_S) \;\cong\; \ell^1(G_S)\hat{\otimes}\ell^1(G_S),$$

و نتیجه از گزاره 2. 3 دنبال می شود.

اکنون آماده اثبات نتیجه اصلی این بخش هستیم.

قضیه3. 1. فرض کنید S یک نیمگروه معکوس با خودتوان E باشد. $\ell^1(S)$ را به عنوان یک مدول باناخ بر

$\ell^1(E)$ با افزایش عملگر سمت راست و عملگر ناچیز سمت چپ در نظر بگیرید. سپس $\ell^1(S)$ یک مدول میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر S میانگین‌پذیر باشد.

اثبات. اگر $\ell^1(S)$ یک مدول میانگین‌پذیر باشد، پس بنابراین توسط استنباط 3. 2 و گزاره 2. 5 $\ell^1(GS)$ است. از اینرو $\ell^1(GS)$ توسط استنباط فوق میانگین‌پذیر است و GS توسط قضیه جانسون میانگین‌پذیر است. بنابراین S توسط [DN, thm.1] میانگین‌پذیر است.

بالعکس اگر μ میانگین ناوردا سمت راست بر S و M باشد، توسط $\ell^\infty(S \times S)$ تعریف شود

$$M(f) = \int_S f(s^*, s) d\mu(s),$$

سپس M به وضوح یک تابع خطی کراندار است و $M(1 \otimes 1) = \mu(1) = 1$. همچنین برای هر $s \in S$ و $f \in \ell^\infty(S \times S)$ داریم

$$\begin{aligned} s.M(f) = M(f.s) &= \int_S f(st^*, t) d\mu(t) \\ &= \int_S f(s(ts)^*, ts) d\mu(t) \\ &= \int_S f(ss^*t^*, ts) d\mu(t) \\ &= \int_S f((tss^*)^*, (tss^*)s) d\mu(t) \\ &= \int_S f(t^*, ts) d\mu(t) \\ &= M(s.f) = M.s(f), \end{aligned}$$

و برای هر $s \in S$ و $f \in J \subseteq \ell^\infty(S \times S)$ داریم

$$
\begin{aligned}
\omega^{**}(M).s(f) &= \omega^{**}M(f.s) \\
&= M(\omega^{*}(f.s)) = \int_S \omega^{*}(f.s)(t^{*},t)d\mu(t) \\
&= \int_S f.s(t^{*}t)d\mu(t) = \int_S f(st^{*}t)d\mu(t) \\
&= f(s)\int_S d\mu(t) = f(s),
\end{aligned}
$$

جایی که آخرین تساوی بین انتگرال‌هاست زیرا با بحث بعد از استنباط 3. 1. ، برای هر $e \in E$ ، f $(se) = f\ (s)$ است. از اینرو M قطر مجزی مدول برای $\ell^1(S)$ را افزایش می‌دهد و بنابراین $\ell^1(S)$ یک مدول میانگین‌پذیر است.

اکنون ما می توانیم دو نمونه برای رد قضیه مطرح شده در بخش2 ارائه دهیم. برای مثال دوم ما از این واقعیت استفاده می کنیم که اگر S شرایط دونکان و نامیوکا Dk را حفظ کند، برای برخی اعداد صحیح k اگر و تنها اگر $\ell^1(E)$ یک همانی تقریبی کراندار داشته باشد و اگر و تنها اگر $\ell^1(S)$ یک همانی تقریبی کراندار داشته باشد [DN] صادق است.

مثال3. 1. (i) یک نیمگروه معکوس S با تعداد بینهایت از خودتوان‌ها وجود دارد (بسیاری از آنها در میان نیمگروه کلیفورد قرار دارند). پس $\ell^1(S)$ توسط مثال مطرح شده هر نیمگروه برانت S از یک گروه میانگین‌پذیر در یک مجموعه شاخص بینهایت ، میانگین‌پذیر است، پس بوضوح S میانگین‌پذیر است و بنابراین دوباره $\ell^1(S)$ توسط قضیه فوق میانگین پذیر است، اما آن هیچ همانی تقریبی کراندار ندارد[DN].

مثال 3. 2. (i) یک نیمگروه معکوس S وجود دارد که برای $\ell^1(S)$ یک مدول میانگین‌پذیر است، اما میانگین‌پذیر نیست.

(i) یک نیمگروه معکوس S وجود دارد که برای $\ell^1(S)$ یک مدول میانگین‌پذیر است، اما هیچ همانی تقریبی کرانداری ندارد.[DN]

سپس ما می‌توانیم میانگین‌پذیری مدول نیمگروه تعدیل شده C^*- جبری $C_r^*(S)$ را در نظر بگیریم و نیمگروه جبری وون نمان VN(S) توسط $C^*(S)$ تولید شده است.

ما خوانندگان را برای تعاریف به بخش [Pa] ارجاع می دهیم. در اینجا تنها لازم است که بدانیم $C_r^*(S)$ یک تصویر مشابه از $\ell^1(S)$ است[Pa]. بنابراین ممکن است $C_r^*(S)$ را به عنوان یک $\ell^1(E)$-مدول فرض نماییم (با عملگرهای به دست آمده از عملگر $\ell^1(E)$ بر $\ell^1(S)$، همانگونه که در قضیه فوق ذکر شد). همچنین VN(S) تصویر مشابه از $C_r^*(S)$ است و بنابراین عملگر به دست آمده از $\ell\ (E)$ را به طور مشابه اجرا می‌کند. در این بخش دو نتیجه نسبی زیر را داریم.

نتیجه3. 1. با توجه به قضیه فوق، اگر Sمیانگین‌پذیر باشد پس $C_r^*(S)$ مدول میانگین‌پذیر است.

اثبات. اگر Sمیانگین‌پذیر باشد، پس $C_r^*(S)$ توسط قضیه فوق و گزاره 2. 3 مدول میانگین‌پذیر است.

نتیجه 3. 2. با توجه به قضیه فوق، اگر هر گروه فرعی بیشینه از S میانگین‌پذیر باشد، S شرایط دونکان و نامیوکا Dk را حفظ می‌کند. برای برخی اعداد صحیح k، پس $V\ N\ (S)$ مدول میانگین‌پذیر است.

اثبات. تحت شرایط اولیه $V\,N\,(S)$ میانگین پذیر است [Pa] و تحت شرایط ثانویه $\ell^1(E)$ یک همانی تقریبی کراندار دارد [DN]. از اینرو نتیجه از گزاره 2. 1 تبعیت می کند.