برنامه نویسی خطی احتمال با اعداد فازی ذوذنقه ای

چکیده

برنامه نویسی خطی فازی با اعداد فازی ذوذنقه ای (TrFNs) در نظر گرفته شده و روشی برای حل آن ارایه شده است. در این روش ، (TrFNs) ها برای پوشش اطلاعات غیر قطعی و غیر دقیق برای ضرایب هدف غیر دقیق و ضرایب فناوری های غیر دقیق و یا منابع موجود استفاده

می شود.برنامه نویسی چند هدفی کمکی برای حل برنامه نویسی احتمال خطی با (TrFNs) ساخته می شود.: کمینه سازی پراکندگی چپ، بیشینه سازی پراکندگی راست، بیشینه سازی نقطه نهایی چپ مد و بیشینه سازی نقطه میانی مد. سه رویکرد برای حل برنامه نویسی چند هدفی کمکی ساخته شده از جمله رویکرد خوشبینانه، رویکرد بدبینانه و رویکرد مجموع خطی بر اساس تابع عضویت ارایه شده است. مثال سرمایه گذاری و مسئله انتقال برای اثبات فرایند اجرایی این روش ارایه می شود . آنالیز های مقایسه نشان می دهد که برنامه نویسی خطی با TrFNs در این مقاله برنامه نویسی خطی احتمال با اعداد فازی مثلثی تعمیم می دهد.

لغات کلیدی: برنامه نویسی خطی فازی، عدد فازی ذوذنقه ای، عدد فازی مثلثی، برنامه نویسی خطی چند منظوره

2- تعریف   اعداد فازی ذوذنقه ای و برناه نویسی هدف بازه ای

2-1 تعریف اعداد فازی ذوذنقه ای

عدد فازی $\tilde{m}$ یک زیر مجموعه فازی خاص در مجموعه R از اعداد واقعی است. اگر فرض شود که $\tilde{m} = (l, m_1, m_2, r)$ به صورت TrFN باشد، که تابع عضویت $\mu_{\tilde{m}}$ از $\tilde{m}$ به شکل ذیل است:

$$\mu_{\tilde{m}}(x) = \begin{cases} \frac{x-l}{m_1-l} & (l \leqslant x < m_1), \\ 1 & (m_1 \leqslant x \leqslant m_2), \\ \frac{r-x}{r-m_2} & (m_2 < x \leqslant r). \end{cases}$$

بازه بسته $[m_1, m_2]$ حالت $\tilde{m}$ است.l و r کران های بالا و پایین $\tilde{m}$ می باشند(22).

به آسانی مشاهده می شود که TrFN $\tilde{m} = (l, m_1, m_2, r)$ در صورتی به عدد حقیقی m کاهش می یابد که $l = m_1 = m_2 = r$. باشد.بر عکس، یک عدد

حقیقی m را می توان به صورت TrFN $\tilde{m} = (m, m, m, m)$ نوشت.

TrFN $\tilde{m} = (l, m_1, m_2, r)$ به TrFN $\tilde{m} = (l, m_1, r)$ در صورتی کاهش می یابد که $m_1 = m_2$ باشد.

TrFN $\tilde{m} = (l, m_1, m_2, r)$ در صورتی موسوم به TrFN مثبت خواهد بود که $l \geqslant 0$ و یکی از l, m_1, m_2 و r غیر صفر باشد. به علاوه، $\tilde{m} = (l, m_1, m_2, r)$ در صورتی TrFN مثبت نرمال شده خواهد بود که $l \geqslant 0$ و $r \leqslant 1$ باشد.

2-2 برنامه نویسی هدف بازه ای

ایشی یاچی و تاناکا (20) تعاریفی از بیشینه و کمینه سازی مسائل با توابع هدف بازه ای ارایه کرده که در تعاریف 1 و2 به صورت ذیل معرفی شده است.

تعریف 1(20)، اگر $\tilde{a} = [a_l, a_u]$ به صورت بازه باشد، مسئله بیشینه سازی با تابع هدف بازه به صورت ذیل خواهد بود:

که معادل با مسئله برنامه نویسی ریاضی دو منظوره ذیل است:

$$\begin{aligned} &\max \left\{a_l, \frac{1}{2}(a_l + a_u)\right\}, \\ &s.t.\ \tilde{a} \in \Omega, \end{aligned}$$

که Ω مجموعه محدودیت هایی است که در آن متغیر $\tilde{a}$ باید بر اساس ملزومات در شرایط واقعی باشد:

تعریف 2(20)، فرض کنید که اگر $\tilde{a} = [a_l, a_u]$ بازه باشد. مسئله کمینه سازی با تابع هدف فاصله به صورت ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} &\min \{\tilde{a}\}, \\ &s.t.\ \tilde{a} \in \Omega, \end{aligned}$$

که معادل با مسئله برنامه نویسی ریاضی دو منظوره ذیل است:

$$\min \left\{a_u, \frac{1}{2}(a_l + a_u)\right\},$$
$$s.t.\ \tilde{a} \in \Omega.$$

3- برنامه نویسی خطی احتمال با اعداد فازی ذوذنقه ای

لای و هاونگ(2) به بررسی برنامه نویسی خطی احتمال با TFN پرداختند. بر این اساس، ما برنامه نویسی خطی احتمال را برای مورد TrFNs. تعمیم می دهیم.

بدون از دست دادن تعمیم، ما به تعریف برنامه نویسی خطی احتمال با TrFNs. به شکل ذیل می پردازیم:

$$\max\ \{\tilde{z} = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},$$
$$s.t. \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}x \leqslant \tilde{\mathbf{b}}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{cases}$$

که $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{m\times n}$، ماتریکس ضریب فناوری، $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m)^{\mathrm{T}}$ بردار منبع موجود و $\tilde{\mathbf{c}} = (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_n)^{\mathrm{T}}$ بردار ضریب هدف ، $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$

بردار متغیر تصمیم گیری می باشد.

$\tilde{a}_{ij} = (a_{ijl}, a_{ijm_1}, a_{ijm_2}, a_{ijr}), \tilde{c}_j = (c_{jl}, c_{jm_1}, c_{jm_1}, c_{jr})$ و

$\tilde{b}_i = (b_{il}, b_{im_1}, b_{im_2}, b_{ir})\ (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ همگی TrFNs. های

معلوم می باشند. $x_i \geqslant 0 (j = 1, 2, \ldots, n)$ قطعی و مجهول می باشد که باید یافت شود.

برای سادگی بیشتر، برخی تفاسیر را می توان به شکل معرفی کرد.

$$\boldsymbol{A}_l = (a_{ij_l})_{m\times n}, \quad \boldsymbol{A}_{m_1} = (a_{ij_{m_1}})_{m\times n}, \quad \boldsymbol{A}_{m_2} = (a_{ij_{m_2}})_{m\times n}, \quad \boldsymbol{A}_r = (a_{ijr})_{m\times n},$$
$$\boldsymbol{c}_l = (c_{1l}, c_{2l}, \ldots, c_{nl})^T, \quad \boldsymbol{c}_{m_1} = (c_{1m_1}, c_{2m_1}, \ldots, c_{nm_1})^T, \quad \boldsymbol{c}_{m_2} = (c_{1m_2}, c_{2m_2}, \ldots, c_{nm_2})^T, \quad \boldsymbol{c}_r = (c_{1r}, c_{2r}, \ldots, c_{nr})^T,$$
$$b_l = (b_{1l}, b_{2l}, \ldots, b_{ml})^T, \quad b_{m_1} = (b_{1m_1}, b_{2m_1}, \ldots, b_{mm_1})^T, \quad b_{m_2} = (b_{1m_2}, b_{2m_2}, \ldots, b_{mm_2})^T, \quad b_r = (b_{1r}, b_{2r}, \ldots, b_{mr})^T.$$

1-3 ضریب هدف مبهم $\tilde{c}$

نخست، فرض کنید که در معادله 1، $\tilde{\mathbf{c}}$ ضریب هدف مبهم می باشد در حالی که $\tilde{\mathbf{A}}$ ماتریکس ضریب فناوری قطعی و $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m)^{\mathrm{T}}$ بردار

منبع قابل دسترس قطعی است. یعنی معادله 1 را می توان به شکل ذیل نوشت:

$$\max\ \{\tilde{z} = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\quad s.t.\begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\end{cases}$$

که

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^{\mathrm{T}}, a_{ij} \in R, b_i \in R(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

است.

در معادله 2، هدف فازی $\tilde{z} = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ is a TrFN $\tilde{z} = \left((\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)$ است. محتمل ترین مقدار $\tilde{z}$ بازه $[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]$ و کران پایین و بالا به ترتیب $(\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ و $(\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, می باشد.بیشینه سازی هدف فازی $\tilde{z}$ را می توان با بیشینه سازی $(\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ پایین تر، $(\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$, بالاتر و دو نقطه نهایی $(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ و $(\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ حالت

$[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]$ بدست اورد. از این روی معادله 2 را می توان با برنامه نویسی چند منظوره ذیل حل کرد:

$$\begin{aligned}&\max\ \{(\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\ &s.t.\ \begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

با این حال، چهار توابع هدف فوق، $(\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ و $(\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ شکل TrFN $\left((\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)$ را طی فرایند بهینه سازی حفظ می کنند. از این روی برای حفظ شکل TrFN(نرمال و محدب)، توزیع احتمال، چهار تابع هدف فوق را به صورت کارامد تغییر می دهد.

برای حالت TrFN $\left((\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)$، چون تابع هدف معادله 2 ، $\{\tilde{z} = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\}$ را بیشینه سازی می کند، بیشینه سازی بازه $[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]$ برای تابع هدف طبیعی است. بر طبق تعریف 1، به منظور بیشینه سازی بازه $[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]$، ما باید نقطه نهایی چپ $(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ و نقطه میانی

$\frac{1}{2}[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]$ از این بازه را به طور هم زمان بیشینه کنیم. برای کران های بالاتر و پایین تر $\mathrm{TrFN}\ \left((\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}, (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)$، $[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]$ را کمینه و $[(\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}]$ را به جای کمینه سازی $(\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ پایین تر و $(\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ بیشینه کنیم. این آنالیز را می توان با شکل 1 نشان داد.

با توجه به شکل 1 می توان گفت که معادله 2 را می توان به مدل برنامه نویسی چند منظوره ذیل تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\min\ \{z_1 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max\ \{z_2 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max\ \{z_3 = \frac{1}{2}[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x})]\},\\
&\max\ \{z_4 = (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&s.t.\ \begin{cases}\mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}.\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

اگرچه معادله 4، مدل برنامه نویسی خطی چند منظوره است، می تواند به طور کارامدی برای حفظ شکل TrFN تابع هدف $\tilde{z}$ حفظ شود. چندین

شیوه استاندارد برای تعریف راه حل برنامه نویسی چند منظوره وجودددارد. طبیعتا، مفهوم راه حل های بهینه/کارامد پارتو استفاده می شود. سپس ما سه نوع رویکرد برای حل این مدل برنامه نویسی خطی چند منظوره ارایه می کنیم.

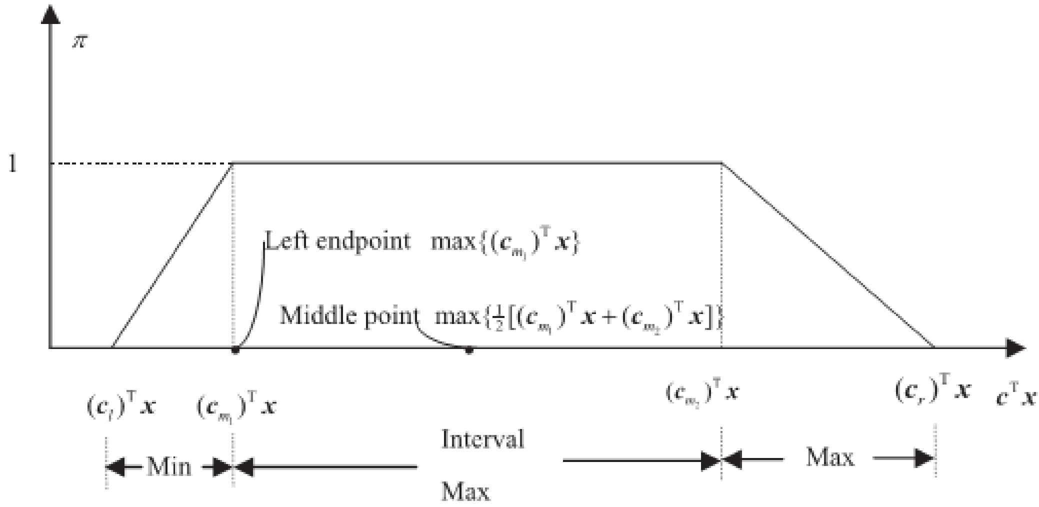
از آن جا که تابع هدف z_i، تابعی از بردار متغیر تصمیم گیری x است، $z_i = z_i(\mathbf{x})(i = 1, 2, 3, 4).$ نشان داده می شود و $\mathbf{x}_i^*$ مقدار تابع ماکزیمم و راه حل بهینه برای مدل برنامه نویسی خطی ذیل است:

$$\max \ \{z_i = z_i(x)\},$$
$$s.t. \begin{cases} \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{cases} \tag{5}$$

آنگاه، $z_i^{\min} = \min\{z_i(\mathbf{x}_1^*), z_i(\mathbf{x}_2^*), z_i(\mathbf{x}_3^*), z_i(\mathbf{x}_4^*)\}(i = 1, 2, 3, 4)$ خواهد بود. تابع عضویت خطی تابع هدف z1 را می توان به صورت ذیل محاسبه کرد:

$$\mu_{z_1}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } z_1 < z_1^{\min}, \\ (z_1^{\max} - z_1)/(z_1^{\max} - z_1^{\min}) & \text{if } z_1^{\min} \leqslant z_1 \leqslant z_1^{\max}, \\ 0 & \text{if } z_1 > z_1^{\max}, \end{cases} \tag{6}$$

شکل 1: شمایی از حل $\max \bar{z} = \bar{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}.$



π
1
Left endpoint $\max\{(\boldsymbol{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\}$
Middle point $\max\{\frac{1}{2}[(\boldsymbol{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}]\}$
$(\boldsymbol{c}_l)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
$(\boldsymbol{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
$(\boldsymbol{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
$(\boldsymbol{c}_r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$
Min
Interval
Max
Max

تابع رابطه خطی تابع هدف $z_i(i = 2, 3, 4)$ را می توان به شکل ذیل محاسبه کرد:

$$\mu_{z_i}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } z_i > z_i^{\max}, \\ (z_i - z_i^{\min})/(z_i^{\max} - z_i^{\min}) & \text{if } z_i^{\min} \leqslant z_i \leqslant z_i^{\max} \\ 0 & \text{if } z_i < z_i^{\min}. \end{cases}$$

از این ر.ی، معادله 4 را می توان با مدل برنامه نویسی خطی ذیل حل کرد:

$$\begin{aligned} &\max \ \mu, \\ &s.t. \begin{cases} 4\mu_{z_i} + \sum_{i=1}^{4}\mu_{z_i} \geqslant 8\mu \ (i = 1, 2, 3, 4), \\ \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

یا

$$\begin{aligned} &\max \ \mu, \\ &s.t. \begin{cases} 4\mu_{z_i} + \sum_{i=1}^{4}\mu_{z_i} \leqslant 8\mu \ (i = 1, 2, 3, 4), \\ \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

یا

$$\max \left\{ w_1\mu_{z_1}(\mathbf{x}) + w_2\mu_{z_2}(\mathbf{x}) + w_3\mu_{z_3}(\mathbf{x}) + w_4\mu_{z_4}(\mathbf{x}) \right\}, \quad s.t. \begin{cases} \mathbf{Ax} \leqslant \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{cases} \tag{10}$$

که $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4)^{\mathrm{T}}$ بردار وزنی هدف $z_i\ (i = 1,2,3,4)$, است و مستلزم این است که $w_i \geqslant 0\ (i = 1,2,3,4)$ و $\sum_{i=1}^{4} w_i = 1$.

معادله 8 نوعی روش بدبینانه است که نشان می دهد که تصمیم گیرنده بسیار محافظه کار است در حالی که معادله 9 نوعی رویکرد خوش بینانه است که نشان می دهد که DM بسیار خصمانه است. معادله 10 رویکرد مجموع خطی بر تابع عضویت است.

اثبات این که راه حل های بهینه معادلات 8 تا 10 همگی راه حل های بهینه پارتو معادله 4 است سخت نیست.

2-3 تابع مبهم و ضرایب فناوری $(\tilde{c}, \tilde{A})$

فرض کنید که در معادله 1، $\tilde{\mathbf{c}}$ ضریب هدف مبهم، $\tilde{\mathbf{A}}$ ماتریکس ضریب فناوری مبهم و $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m)^{\mathrm{T}}$ بردار منبع موجود قطعی است. یعنی، معادله 1 به صورت ذیل بازنویسی می شود.

$$\max \{\tilde{z} = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\}, \quad s.t. \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}x \leqslant \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{cases} \tag{11}$$

به دلیل این که محدودیت های معادله 11 حاوی محدودیت های $\tilde{\mathbf{A}}x \leqslant \mathbf{b}$ می باشد، یک روش متوسط وزنی برای رفع این محدودیت ها می باشد. یعنی، $(\omega_1\mathbf{A}_{l\beta} + \omega_2\mathbf{A}_{m_1\beta} + \omega_3\mathbf{A}_{m_2\beta} + \omega_4\mathbf{A}_{r\beta})\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$ که $\omega_i \geqslant 0(i = 1,2,3,4)$ $\sum_{i=1}^{4}\omega_i = 1, \beta \in [0,1]$ احتمال قابل قبول حداقل است، $\mathbf{A}_{l\beta} = \mathbf{A}_l + \beta(\mathbf{A}_{m_1} - \mathbf{A}_l),\ \mathbf{A}_{m_1\beta} = \mathbf{A}_{m_1} + \beta(\mathbf{A}_{m_1} - \mathbf{A}_{m_1}) = \mathbf{A}_{m_1},\ \mathbf{A}_{m_2\beta} = \mathbf{A}_{m_2} + \beta(\mathbf{A}_{m_2} - \mathbf{A}_{m_2}) = \mathbf{A}_{m_2},\ \mathbf{A}_{r\beta} = \mathbf{A}_r - \beta(\mathbf{A}_r - \mathbf{A}_{m_2})$. که از این روی، مدل کمکی به صورت ذیل است:

$$
\begin{aligned}
&\min \{z_1 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max \{z_2 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max \left\{z_3 = \frac{1}{2}[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x})]\right\},\\
&\max \{z_4 = (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&s.t. \begin{cases} [\frac{1}{6}(\mathbf{A}_{l\beta} + 2\mathbf{A}_{m_1\beta} + 2\mathbf{A}_{m_2\beta} + \mathbf{A}_{r\beta})]\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b},\\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

که اوزان $\omega_1 = \frac{1}{6}, \omega_2 = \frac{2}{6}, \omega_3 = \frac{2}{6}, \omega_4 = \frac{1}{6}$ می باشند. مشابه با TrFNs، $\mathbf{A}_{l\beta}$ نسبت به کران پایین بسیار بدبینانه است. $\mathbf{A}_{r\beta}$ یک کران بالا و بسیار بدبینانه بوده و اوزان کم تر باید به آن ها نسبت داده شود. با این حال، $\mathbf{A}_{m_1\beta} = \mathbf{A}_{m_1}$ و $\mathbf{A}_{m_2\beta} = \mathbf{A}_{m_2}$ محتمل ترین مقادیر می باشند، که می تواند مهم ترین و ارزشمند ترین اطلاعات را در اختیار بگذارد. از این روی دادن اوزان بیشتر به آن ها بسیار طبیعی است.

در صورت وجود بتا، معادله 12 یک مدل برنامه نویسی خطی چند هدفه می باشد که به طور مشابه با روش حل معادله 4 حل می شود.

3-3 ضرایب فناوری و هدف مبهم و منابع موجود مبهم $(\tilde{c}, \tilde{A}, \tilde{b})$

اگر $\tilde{\mathbf{c}},\tilde{\mathbf{A}}$ و $\tilde{\mathbf{b}}$ همگی مبهم و غیر دقیق باشند، آنگاه برنامه نویسی خطی احتمال باTrFNs همانند معادله 1 است. بر اساس راهبرد تابع هدف فازی، مفاهیم رتبه بندی فازی را برای رفع این محدودیت های فازی ترکیب می کنیم، آنگاه، مدل کمکی به صورت ذیل به دست می آید:

$$\begin{aligned}
&\min\ \{z_1 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max\ \{z_2 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max\ \{z_3 = \frac{1}{2}[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x})]\},\\
&\max\ \{z_4 = (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&s.t.\ \begin{cases}\mathbf{A}_{l\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{l\beta},\\ \mathbf{A}_{m_1\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{m_1\beta},\\ \mathbf{A}_{m_2\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{m_2\beta},\\ \mathbf{A}_{r\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{r\beta},\\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0},\end{cases}
\end{aligned} \tag{13}$$

که

$$\mathbf{b}_{l\beta} = \mathbf{b}_l + \beta(\mathbf{b}_{m_1} - \mathbf{b}_l),\ \mathbf{b}_{m_1\beta} = \mathbf{b}_{m_1} + \beta(\mathbf{b}_{m_1} - \mathbf{b}_{m_1}) = \mathbf{b}_{m_1},\ \mathbf{b}_{m_2\beta} = \mathbf{b}_{m_2} + \beta(\mathbf{b}_{m_2} - \mathbf{b}_{m_2}) = \mathbf{b}_{m_2},\ \mathbf{b}_{r\beta} = \mathbf{b}_r - \beta(\mathbf{b}_r - \mathbf{b}_{m_2}).$$

می باشد.

هم چنین اگر، بتا معلوم باشد، معادله 13 یک مدل برنامه نویسی خطی چند منظوره است که می تواند توسط روش حل معادله 4 حل شود.

مشهود است که اگر همه TrFNs در برنامه نویسی خطی احتمال با TrFNs به صورت TFN باشد، آنگاه $a_{ijm_1} = a_{ijm_2}, c_{jm_1} = c_{jm_2}$ و $b_{im_1} = b_{im_2} (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ و $\mathbf{A}_{m_1} = \mathbf{A}_{m_2}, \mathbf{c}_{m_1} = \mathbf{c}_{m_2}, \mathbf{A}_{m_1\beta} = \mathbf{A}_{m_2\beta}, \mathbf{b}_{m_1\beta} = \mathbf{b}_{m_2\beta}$. سپس معادله 13 به مدل کمکی ذیل تبدیل می شود:

$$
\begin{aligned}
&\min\ \{z_1 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max\ \{z_2 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&\max\ \{z_4 = (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\},\\
&s.t.\ \begin{cases} \mathbf{A}_{l\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{l\beta},\\ \mathbf{A}_{m_1\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{m_1\beta},\\ \mathbf{A}_{r\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{r\beta},\\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{cases}
\end{aligned}
$$

که مشابه با مدل کمکی بدست آمده در معادله 13 است. به عبارت دیگر، برنامه نویسی خطی احتمال با TrFNs این مقاله به برنامه نویسی خطی احتمال با TFN کاهش می یابد. از این روی مورد اول نسخه توسعه یافته دومی است.

هم چنین برای برنامه نویسی خطی احتمال کمینه سازی با TrFNs:

$$\begin{aligned} &\min \{\tilde{z} = \tilde{\mathbf{c}}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\}, \\ &s.t. \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}x \leqslant \tilde{\mathbf{b}}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}, \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

با استفاده از تعریف 2، مدل کمکی معادل ذیل را داریم:

$$\begin{aligned} &\max \{z_1 = (\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_l)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\}, \\ &\min \left\{z_2 = (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right\}, \\ &\min \{z_3 = \frac{1}{2}[(\mathbf{c}_{m_1})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x})]\}, \\ &\min \{z_4 = (\mathbf{c}_r)^{\mathrm{T}}\mathbf{x} - (\mathbf{c}_{m_2})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\}, \\ &s.t. \begin{cases} \mathbf{A}_{l\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{l\beta}, \\ \mathbf{A}_{m_1\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{m_1\beta}, \\ \mathbf{A}_{m_2\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{m_2\beta}, \\ \mathbf{A}_{r\beta}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}_{r\beta}, \\ \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}. \end{cases} \end{aligned} \tag{15}$$

معادله 15 را می توان با روش های مشابه با معادلات 5 تا 10 حل کرد.

4- مسئله سرمایه گذاری واقعی و آنالیز مقایسه نتایج به دست آمده

4-1 مسئله سرمایه گذاری و فرایند آنالیز

روش پیشنهادی به برای حل مسئله سرمایه گذاری بر گرفته از (2) اعمال شد. مدیریت توسعه وینستون-سالم (WSDM) تلاش می کند تا طرح های سرمایه گذاری خود را برای سه سال بعد کامل کند. با در نظر گرفتن بازه زمانی 6 ماهه، (WSDM) انتظارات جریان در آمد را برای سه سال بعد در اختیار می گذارد که در جدول 1 نشان داده شده است. در این مورد خاص، 0.3 میلیون دلار در انتهای سومین سال نقش مهمی ایفا نمی کند.

(WSDM) در سه پروژه توسعه شرکت می کند. پروژه 1 تقویت توسعه شهری است. پروژه 2 بهسازی مسکن در مناطق با درآمد کم و بالا در شرایطی است که یک سری تعمیرات اولیه صورت گیرد و یا در انتهای 3 سال تخریب شود. هدف پروژه 3 سرمایه گذاری در هتل دیزنی یونیورز شدند. اگر (WSDM) در این سه طرح شرکت کنند، این خود مقدار گردش وجوه را در بازه های زمانی 6 ماهه در سه سال بعدی نشان می دهد که در جدول 1 دیده می شود و در آن اعداد منفی نشان دهنده سرمایه گذاری ها، و اعداد مثبت نشان دهنده درآمد است.

فرض کنید که WSDM دارای 2 میلیون دلار موجود برای سرمایه گذاری است و می تواند پولی را برای بازه های نیم ساله با 6 درصد

نرخ بهره در هر نیم سال قرض بگیرد. حداکثر، 2 میلیون دلار را می توان در یک زمان قرض کرد یعنی یک مدیر برجسته هرگز بیش از 2 میلیون دلار خواهد بود. WSDM می تواند بودجه مازاد را با نرخ بهره 4 درصد در هر نیم سال سرمایه گذاری کند.

مورد 1: جریان های گردش وجوه مبهم

فرض کنید که گردش وجوه نقدی برای ششمین دوره مبهم بوده و با TrFNs. نشان داده می شود. برای مثالف جریان گردش وجوه برای پروژه 1، TrFN (5.0,5.2,5.5,6.2) است، به این معنی که محتمل ترین مقدار این جریان گردش وجوه بین [5.2,5.5] بوده و کران های بالا و پایین به ترتیب 5 و 6.2 هستند. در صورتی که WSDM در طرح کم

تر از 100 درصد شرکت کند، همه گردش وجوه همان طرح به طور متناسب کاهش می یابد.

هدف سرمایه گذاری WSDM، بیشینه سازی ارزش خالص در انتهای 30 سال است. سپس، مسئله در نظر گرفته شده چگونگی تخصیص منطقی نسبت های مشارکت هر طرح و مبالغ وام گرفته شده در هر دوره است . از این روی، ما نخست به معرفی متغیر های تصمیم می پردازیم.

F: مشارکت جزیی در پروژه فوستر سیتی

M: مشارکت جزیی در پروژه لاور میدل

D: مشارکت جزیی در دیزنی-یونیورز

Bi: مبلغ قرض گرفته شده در دوره $i(i = 1, 2, \ldots, 6)$

L_i: مبلغ وام داده شده در دوره $i(i = 1, 2, \ldots, 6)$

$\tilde{z}$: ارزش خالص بعد از شش دوره(بدون در نظر گرفتن 0.3 میلیون دلار)

مدل برنامه نویسی خطی فازی به صورت ذیل است:

$$\max \{\tilde{z} = (5.0, 5.2, 5.5, 6.2)F + (-1.4, -1.2, -1.0, -0.85)M + (4.5, 5.0, 6.0, 6.5)D - 1.06B_6 + 1.04L_6\},$$
$$s.t. \begin{cases} 3F + 2M + 2D - B_1 + L_1 \leqslant 2, \\ F + 0.5M + 2D + 1.06B_1 - 1.04L_1 - B_2 + L_2 \leqslant 0.5, \\ 1.8F - 1.5M + 1.8D + 1.06B_2 - 1.04L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.4, \\ -0.4F - 1.5M - D + 1.06B_3 - 1.04L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.38, \\ -1.8F - 1.5M - D + 1.06B_4 - 1.04L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.36, \\ -1.8F - 0.2M - D + 1.06B_5 - 1.04L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.34, \\ 0 \leqslant B_i \leqslant 2 \ (i = 1, 2, \ldots, 6), \\ 0 \leqslant F \leqslant 2, 0 \leqslant M \leqslant 2, 0 \leqslant D \leqslant 2. \end{cases} \tag{16}$$

با معادله 4، معادله 16 را می توان با مدل برنامه نویسی چند منظوره کمکی حل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\min \{z_1 = 0.2F + 0.2M + 0.5D\},\\
&\max \{z_2 = 5.2F - 1.2M + 5.0D - 1.06B_6 + 1.04L_6\},\\
&\max \{z_3 = 5.35F - 1.1M + 5.5D - 1.06B_6 + 1.04L_6\},\\
&\max \{z_4 = 0.7F + 0.15M + 0.5D\},\\
&s.t. \begin{cases}
3F + 2M + 2D - B_1 + L_1 \leqslant 2,\\
F + 0.5M + 2D + 1.06B_1 - 1.04L_1 - B_2 + L_2 \leqslant 0.5,\\
1.8F - 1.5M + 1.8D + 1.06B_2 - 1.04L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.4,\\
-0.4F - 1.5M - D + 1.06B_3 - 1.04L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.38,\\
-1.8F - 1.5M - D + 1.06B_4 - 1.04L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.36,\\
-1.8F - 0.2M - D + 1.06B_5 - 1.04L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.34,\\
0 \leqslant B_i \leqslant 2 \ (i = 1, 2, \ldots, 6),\\
0 \leqslant F \leqslant 2, 0 \leqslant M \leqslant 2, 0 \leqslant D \leqslant 2.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

جدول 1: مسئله سرمایه گذاری چنده دوره و چند طرح(بر حسب میلیون دلار)

دوره	0	1	2	3	4	5	6
سال	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
	2.0	0.5	0.4	0.38	0.36	0.34	0.3
جریان درآمد	−3.0 −2.0 −2.0	−1.0 −0.5 −2.0	−1.8 1.5 −1.8	0.4 1.5 1.0	1.8 1.5 1.0	1.8 0.2 1.0	(5.0,5.2,5.5,6.2) (−1.4,−1.2,−1.0,−0.85) (4.5,5.0,6.0,6.5)
طرح1							
طرح2							

طرح 3							

. با استفاده از معادله 5، داریم:

$$z_1^{\max} = 0.4831, \quad z_2^{\max} = 6.8880, \quad z_3^{\max} = 7.0576, \quad z_4^{\max} = 0.5859,$$

$$z_1^{\min} = 0.0000, \quad z_2^{\min} = -3.3200, \quad z_3^{\min} = -3.3200, \quad z_4^{\min} = 0.0000.$$

سپس از سه روش (معادلات 8–10 برای حل معادله 7 به ترتیب استفاده می کنیم: نخست، حل معادله 17 با استفاده از معادله 8(روش بدبینانه)، راه حل بهینه ذیل را می دهد:

$$F = 0.34, \quad M = 0.67, \quad D = 0, \quad B_1 = 0.37, \quad B_2 = 0.57, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = 0, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = 0,$$

$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0.18, \quad L_4 = 1.71, \quad L_5 = 3.76, \quad L_6 = 5.$$

با جایگزینی راه حل بهینه فوق در تابع هدف معادله 16، مقدار هدف بهینه به صورت (5.98, 6.19,6.42, 6.76) به دست می آید.یعنی

محتمل ترین سود بین 6.19 و 6.42، و کران های بالا و پایین سود مسئله به ترتیب 6.76و 5.98 می باشند.

دوما، با حل معادله 17 با استفاده از معادله 9(روش خوش بینانه)، راه حل بهینه زیر را به دست می اوریم.

$$F=1,\quad M=0,\quad D=0,\quad B_1=0,\quad B_2=0,\quad B_3=2,\quad B_4=2,\quad B_5=2,\quad B_6=2,$$
$$L_1=0,\quad L_2=0,\quad L_3=0,\quad L_4=0,\quad L_5=2,\quad L_6=0.$$

با جایگزینی راه حل بهینه فوق در تابع هدف معادله 16، مقدار هدف بهینه به صورت $(-3.52,-3.32,-3.12,-2.97)$ به دست می آید.یعنی محتمل ترین سود بین -3.32 و -3.12 و کران های بالا و پایین سود مسئله به ترتیب -2.97و -3.52 می باشند. این نتیجه مطابق با انتظار است زیراDM بسیار خوش بینانه بوده و منجر به سود منفی می شود.

در نهایت حل معادله 17 با معادله 10(رویکرد مجموع خطی بر اساس تابع عضویت)، راه حل بهینه برای $\mathbf{w} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$ بدست می آید:

$$F = 0.83, \quad M = 0, \quad D = 0, \quad B_1 = 0.5, \quad B_2 = 0.85, \quad B_3 = 2, \quad B_4 = 1.41, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = 0,$$
$$L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0, \quad L_4 = 0, \quad L_5 = 0.36, \quad L_6 = 2.21.$$

با جایگزینی راه حل بهینه فوق در تابع هدف معادله 16، مقدار هدف بهینه به صورت (6.46, 6.62, 6.87, 7.45) به دست می آید.یعنی محتمل ترین سود بین 6.62 و 6.87، و کران های بالا و پایین سود مسئله به ترتیب 7.45 و 6.46 5.98 می باشند.

برای اثبات تاثیر بردار وزنی W بر روی سود بهینه در این مثال، از بردار وزنی متفاوت W برای حل معادله 17 بر اساس معادله 10 استفاده می کنیم. به طور کلی، باید برخی موارد خاص را در نظر گرفت. یکی وزن متوسط است: $\mathbf{w} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$, . دوما، توابع هدف Z2 و Z3 نسبت به

$\tilde{z}$ TrFN بوده و محتمل ترین مقادیر $\tilde{z}$ می باشند. از این روی اوزان بیشتر باید به Z2 و Z3 یعنی $\mathbf{w}=(\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6})^{T}$ نسبت داده شود. سوما، مشابه با بازی های المپیک، که یک ماکزیمم و یک مینمم نقطه را کنار می گذارند، $\mathbf{w}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^{T}$ را تعیین می کنیم. در نهایت، $\mathbf{w}=(\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6})^{T}$ بر هر دو انتها تاکید داشته و موجب کاهش میانی می شود. همه نتایج محاسبات در جدول 2 نشان داده شده اند.

با توجه به جدول 2 می توان گفت که راه حل های بهینه و سود های بهینه برای $\mathbf{w}=(\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6})^{T}$, $\mathbf{w}=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})^{T}$ W و $\mathbf{w}=(\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6})^{T}$ کاملا مشابه می باشند. راه حل بهینه و سود بهینه برای $\mathbf{w}=(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^{T}$ برابر با دیگر بردار های وزنی نیست. با این حال این بیانگر آن نیست که بردار

وزنی W بر راه حل ها و سود های بهینه تاثیر ندارد. مورد 2 این اثر را تایید می کند.

به علاوه، جدول 2 نشان می دهد که استفاده از روش های مختلف برای حل برنامه نویسی چند هدفه منجر به رسیدن به راه حل های بهینه مخالف مقادیر هدف بهینه می شود. DM می تواند روشی مناسب را برای حل برنامه نویسی چند هدف بر اساس نیاز های واقعی و ترجیح ریسکی حود انتخاب کند.

مورد 2: جریان های گردش وجوه و نرخ های بهره

چون بازار مالی بسیار پیچیده و روز به روز در حال تغییر است، نرخ بهره ثابت نبوده و در دوره های مختلف ممکن است تغییر کند. تصمیم گیرنده بهتر است از TrFNs برای بیان فازی بودن و عدم قطعیت موجود

در نرخ بهره استفاده کند. برای مثال، نرخ بهره شناور به صورت TrFN (6٪, 8٪, 9٪, 11٪), نشان داده می شود که معنی آن این است که این نرخ بهره بین 8 و 9 درصد بوده و کم تر از 6 درصد و بزرگ تر از 11 درصد در سال بعدی نیست. از این روی مطالعه مواردی که در آن نرخ بهره دارای توزیع احتمال ذوذنقه ای است لازم است.

جدول 2: سود وراه حل بهینه با رویکرد های مختلف

متغیر	F	M	D	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	Optimal profit
با معادله 8	0.34	0.67	0	0.37	0.57	0	0	0	0	0	0	0.18	1.71	3.76	5	(5.98, 6.19, 6.42, 6.76)
با معادله 9	1	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	2	0	(−3.52, −3.32, −3.12, −2.97)
با معادله 10 *with* **w**																
$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})^T$	0.83	0	0	0.5	0.85	2	1.41	0	0	0	0	0	0	0.36	2.21	(6.46, 6.62, 6.87, 7.45)
$(\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6})^T$	0.83	0	0	0.5	0.85	2	1.41	0	0	0	0	0	0	0.36	2.21	(6.46, 6.62, 6.87, 7.45)
$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T$	0.7	0.65	0	1.39	2	2	0.49	0	0	0	0	0	0	2.08	3.89	(6.62, 6.89, 7.23, 7.81)
$(\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6})^T$	0.83	0	0	0.5	0.85	2	1.41	0	0	0	0	0	0	0.36	2.21	(6.46, 6.62, 6.87, 7.45)

از اشکال 2 تا 4 می توان مشاهده کرد که سود های بهینه برای سه مورد در (2) و این مقاله بسیار متفاوت است. سود های بهینه ارایه شده در مورد قبلی TFN بدست آمدند ولی در مورد دومی TrFNs می باشند.

محتمل ترین مقدار برای TFN یک عدد حقیقی است در حالی که برای دومی بازه ای است. برای مثال، برای مورد 1، محتمل ترین مقدار بدست آمده 8.20 است و در این مقاله، بین 6.19 و 6.42 می باشد.

ذیلا نرخ بهره شناور،ضرایب هدف و سومین تا ششمین متغیر محدود کننده معادله 16 به صورت مبهم یا فازی در نظر کرفته شده است. نخستین و دومین مورد آغاز دوره های برنامه ریزی هستند که مطمئن می شوند. با این حال نرخ بهره در سال آینده نوسان خواهد داشت. آنگاه با در نظر گرفتن جریان های نقدی و نرخ بهره به طور همزمان، برنامه نویسی خطی فازی را با TrFNs فرموله می کنیم.

$$\max\ \{\tilde{z} = (5.0, 5.2, 5.5, 6.2)F + (-1.4, -1.2, -1.0, -0.85)M + (4.5, 5.0, 6.0, 6.5)D - 1.06B_6 + 1.04L_6\},$$
$$s.t. \begin{cases} 3F + 2M + 2D - B_1 + L_1 \leqslant 2, \\ F + 0.5M + 2D + 1.06B_1 - 1.04L_1 - B_2 + L_2 \leqslant 0.5, \\ 1.8F - 1.5M + 1.8D + (1.050, 1.055, 1.06, 1.065)B_2 - (1.030, 1.035, 1.04, 1.045)L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.4, \\ -0.4F - 1.5M - D + (1.050, 1.055, 1.06, 1.07)B_3 - (1.030, 1.035, 1.04, 1.05)L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.38, \\ -1.8F - 1.5M - D + (1.05, 1.06, 1.065, 1.07)B_4 - (1.035, 1.038, 1.044, 1.05)L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.36, \\ -1.8F - 0.2M - D + (1.055, 1.058, 1.065, 1.075)B_5 - (1.040, 1.042, 1.046, 1.055)L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.34, \\ 0 \leqslant B_i \leqslant 2\ (i = 1, 2, \ldots, 6), \\ 0 \leqslant F \leqslant 2, 0 \leqslant M \leqslant 2, 0 \leqslant D \leqslant 2. \end{cases} \tag{18}$$

با معادله 12، معادله 18 را می توان با مدل برنامه نویسی کمکی چند منظوره با بتا برابر 0.5 حل کرد:

$$\begin{aligned} &\min\ \{z_1 = 0.2F + 0.2M + 0.5D\}, \\ &\max\ \{z_2 = 5.2F - 1.2M + 5.0D - 1.06B_6 + 1.04L_6\}, \\ &\max\ \{z_3 = 5.35F - 1.1M + 5.5D - 1.06B_6 + 1.04L_6\}, \\ &\max\ \{z_4 = 0.7F + 0.15M + 0.5D\}, \\ &s.t. \begin{cases} 3F + 2M + 2D - B_1 + L_1 \leqslant 2, \\ F + 0.5M + 2D + 1.06B_1 - 1.04L_1 - B_2 + L_2 \leqslant 0.5, \\ 1.8F - 1.5M + 1.8D + 1.0575B_2 - 1.0383L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.4, \\ -0.4F - 1.5M - D + 1.0579B_3 - 1.0379L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.38, \\ -1.8F - 1.5M - D + 1.0621B_4 - 1.0413L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.36, \\ -1.8F - 0.2M - D + 1.0621B_5 - 1.0446L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.34, \\ 0 \leqslant B_i \leqslant 2\ (i = 1, 2, \ldots, 6), \\ 0 \leqslant F \leqslant 2, 0 \leqslant M \leqslant 2, 0 \leqslant D \leqslant 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{19}$$

به طور مشابه، از سه رویکرد یعنی معادلات 8 تا 10 به ترتیب استفاده می کنیم. نتایج بدست آمده در جدول 3 نشان داده شده اند.

جدول 3 نشان می دهد که با استفاده از رویکرد بدبینانه (معادله 8)، مقدار هدف بهینه به صورت (6.01,6.21, 6.45,6.79). است. یعنی، کران های بالا و پایین سود های مسئله 6.79 و 6.01 است که محتمل ترین سود بین 6.21 و 6.45 است. با استفاده از روش خوش بینانه، یعنی معادله 9، مقدار هدف بهینه $(-3.52,-3.32,-3.12,-2.97)$. است. یعنی، کران های بالا و پایین سود های مسئله به ترتیب -2.97 و -3.57 است که محتمل ترین آن ها بین -3.35 و -3.12 است.

با استفاده از روش مجموع خطی بر اساس تابع عضویت (معادله 10)، راه حل های بهینه و سوئ های بهینه برای $\bar{\mathbf{w}} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ و $\mathbf{w} = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6})^T$ کاملا مشابه هستند. سود و راه حل بهینه برای $\hat{\mathbf{w}} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)^T$ و

$\mathbf{w} = (\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6})^T$ مشابه با $\tilde{\mathbf{w}} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})^T$ و $\dot{\mathbf{w}} = (\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6})^T$ هسدند. این نشان می دهد که بردار وزنی W بر راه های بهینه و سود بهینه تاثیر دارد.

مورد 3: جریان های گردش نقدی مبهم، نرخ های بهره و جریان های درامد

با افزایش روز افزون پیچیدگی دنیای مالی برخی چالش ها برای DM جهت کسب اطلاعات دقیق از جریان درآمد ناشی از فشار زمانی، کمبود دانش و تخصص محدود تصمیم گیرنده در خصوص مسئله افزایش می یابد.با گذشت زمان، جریان درآمد غالبا به طور دقیق پیش نمی رود. برخی از آن ها با TrFNs. بیان می شوند.

جدول 3: راه حل بهینه و تابع هدف بهینه برای مورد 2 با رویکرد های مختلف

متغیر	F	M	D	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	سود بهینه
با معادله 8	0.34	0.67	0	0.37	0.57	0	0	0	0	0	0	0.18	1.71	3.76	5.02	(6.01,6.21,6.45,6.79)
با معادله 9	0	1	0	0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	(−3.52,−3.32,−3.12,−2.97)
با معادله 10																
$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})^T$	0.83	0	0	0.5	0.85	2	1.40	0	0	0	0	0	0	0.37	2.22	(6.46,6.63,6.88,7.46)
$(\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6})^T$	0.83	0	0	0.5	0.85	2	1.40	0	0	0	0	0	0	0.37	2.22	(6.46,6.63,6.88,7.46)
$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T$	0.7	0.65	0	1.39	2	2	0.49	0	0	0	0	0	0	2.08	3.89	(6.64,6.91,7.25,7.83)
$(\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6})^T$	0.83	0	0	0.5	0.86	2	1.4	0	0	0	0	0	0	0.37	2.22	(6.64,6.63,6.88,7.46)

برای مسائل سرمایه گذاری فوق، ما انتظارات جریان درآمد را از جدول 1 به صورت ذیل اصلاح می کنیم: 0.5, (0.30, 0.35,0.40,0.50), (0.30, 0.35,0.38,0.50), (0.28,0.34,0.36,0.45) و (0.25,0.30, 0.34,0.42),. دیگر فرضیات مشابه با فرضیات قبلی هستند. آنگاه با در نظر گرفتن جریان های گردش پولی مبهم، نرخ بهره و جریان درآمد، ما اقدام به ایجاد برنامه نویسی خطی فازی با TrFNs به شکل ذیل می کنیم:

$$\max\ \{\tilde{z} = (5.0,5.2,5.5,6.2)F + (-1.4,-1.2,-1.0,-0.85)M + (4.5,5.0,6.0,6.5)D - 1.06B_6 + 1.04L_6\},$$
$$s.t.\ \begin{cases} 3F + 2M + 2D - B_1 + L_1 \leqslant 2, \\ F + 0.5M + 2D + 1.06B_1 - 1.04L_1 - B_2 + L_2 \leqslant 0.5, \\ 1.8F - 1.5M + 1.8D + (1.050,1.055,1.06,1.065)B_2 - (1.030,1.035,1.04,1.045)L_2 - B_3 + L_3 \leqslant (0.30,0.35,0.40,0.50), \\ -0.4F - 1.5M - D + (1.050,1.055,1.06,1.07)B_3 - (1.030,1.035,1.04,1.05)L_3 - B_4 + L_4 \leqslant (0.30,0.35,0.38,0.40), \\ -1.8F - 1.5M - D + (1.05,1.06,1.065,1.07)B_4 - (1.035,1.038,1.044,1.05)L_4 - B_5 + L_5 \leqslant (0.28,0.34,0.36,0.45), \\ -1.8F - 0.2M - D + (1.055,1.058,1.065,1.075)B_5 - (1.040,1.042,1.046,1.055)L_5 - B_6 + L_6 \leqslant (0.25,0.30,0.34,0.42), \\ 0 \leqslant B_i \leqslant 2\ (i = 1,2,\ldots,6), \\ 0 \leqslant F \leqslant 2, 0 \leqslant M \leqslant 2, 0 \leqslant D \leqslant 2. \end{cases} \quad (20)$$

با معادله 13، معادله 20 را می توان با مدل برنامه نویسی چند هدفه کمکی با $\beta = 0.5$: حل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\min \{z_1 = 0.2F + 0.2M + 0.5D\},\\
&\max \{z_2 = 5.2F - 1.2M + 5.0D - 1.06B_6 + 1.04L_6\},\\
&\max \{z_3 = 5.35F - 1.1M + 5.5D - 1.06B_6 + 1.04L_6\},\\
&\max \{z_4 = 0.7F + 0.15M + 0.5D\},\\
&s.t. \begin{cases}
3F + 2M + 2D - B_1 + L_1 \leqslant 2,\\
F + 0.5M + 2D + 1.06B_1 - 1.04L_1 - B_2 + L_2 \leqslant 0.5,\\
1.8F - 1.5M + 1.8D + 1.0525B_2 - 1.0325L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.3250,\\
1.8F - 1.5M + 1.8D + 1.055B_2 - 1.035L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.35,\\
1.8F - 1.5M + 1.8D + 1.06B_2 - 1.035L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.4,\\
1.8F - 1.5M + 1.8D + 1.06255B_2 - 1.0475L_2 - B_3 + L_3 \leqslant 0.4500,\\
-0.4F - 1.5M - D + 1.0525B_3 - 1.0325L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.3250,\\
-0.4F - 1.5M - D + 1.055B_3 - 1.035L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.35,\\
-0.4F - 1.5M - D + 1.06B_3 - 1.04L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.38,\\
-0.4F - 1.5M - D + 1.0650B_3 - 1.0450L_3 - B_4 + L_4 \leqslant 0.3900,\\
-1.8F - 1.5M - D + 1.0550B_4 - 1.0365L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.3100,\\
-1.8F - 1.5M - D + 1.06B_4 - 1.038L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.34,\\
-1.8F - 1.5M - D + 1.065B_4 - 1.044L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.36,\\
-1.8F - 1.5M - D + 1.0675B_4 - 1.0470L_4 - B_5 + L_5 \leqslant 0.4050,\\
-1.8F - 0.2M - D + 1.0565B_5 - 1.0410L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.2750,\\
-1.8F - 0.2M - D + 1.058B_5 - 1.042L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.30,\\
-1.8F - 0.2M - D + 1.065B_5 - 1.046L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.34,\\
-1.8F - 0.2M - D + 1.0700B_5 - 1.0505L_5 - B_6 + L_6 \leqslant 0.3800,\\
0 \leqslant B_i \leqslant 2 \ (i = 1, 2, \ldots, 6),\\
0 \leqslant F \leqslant 2, 0 \leqslant M \leqslant 2, 0 \leqslant D \leqslant 2.
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

به طور مشابه، از سه رویکرد (معادلات 8 تا 10) برای حل معادله 21 به ترتیب استفاده می کنیم. نتایج به دست آمده در جدول 4 نشان داده شده اند.

نتایج را برای جدول 4 می توان به طور مشابه برای جدول 3 تجزیه تحلیل کرد.

4-2 آنالیز مقایسه نتایج به دست آمده

در این زیر بخش ما به مقایسه نتایج به دست آمده توسط روش 2 پرداخته و روش پیشنهادی در این مقاله می پردازیم.

لای و هوانگ 2، فرض کردند که اعداد فازی در مسئله سرمایه گذاری فوق همگی TFNs. می باشند. آن ها سود های بهینه متناظر را برای سه مورد 7.91 ,8.20,8.72 برای مورد 1، (8.12,8.41 ,8.99) برای مورد 2 و (6.58,6.86 ,7.44) برای مورد 3 به ترتیب به دست آوردند. در این مقاله، ما از روش بدبینانه برای بدست اوردن سود های بهینه برای سه مورد به صورت (5.98,6.19 ,6.42,6.76) برای مورد 1،

(5.70,5.90,6.14, 6.01,6.21) و 2 برای مورد (6.45,6.79

6.48) برای مورد 3 به ترتیب به دست آوردیم. مقایسه این نتایج در اشکال 2 تا 4 نشان داده شده است. برای نتایج به دست آمده توسط روش خوش بینانه و رویکرد مجموع خطی بر اساس تابع عضویت، آنالیز مقایسه را می توان به طور مشابه انجام داد. این نشان می دهد که TrFNs اطلاعات غیر قطعی تر از TFNs. است.

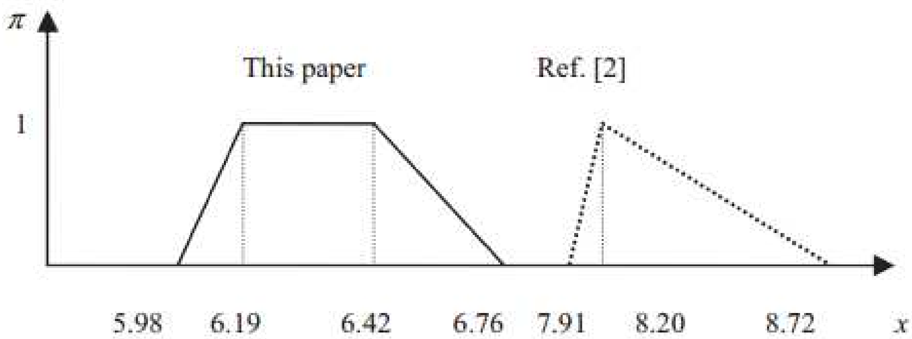
به علاوه، لای و هوانگ (2) تنها یک رویکرد برای حل برنامه نویسی چند هدفه ارایه کردند در حالی که این مقاله سه رویکرد متفاوت را برای حل برنامه نویسی چند منظوره ارایه می کند. در این مقاله، تصمیم گیرنده روشی متفاوت را بر اساس نیاز های واقعی و سلیقه انتخاب می کند که به شدت بر انعطاف پذیری در فرایند تصمیم گیری تاثیر می گذارد.

چون TFNs را می توان به صورت TrFNs نوشت، اگر همه TFN (2) به صورتTrFNs نوشته شود، آنگاه برنامه نویسی احتمال خطی با TFNs ارایه شده در (2) به برنامه نویسی خطی احتمال با TrFNs در این مقاله تبدیل می شود یعنی، برنامه نویسی خطی احتمال در (2) مورد خاصی در این مقاله می باشد.

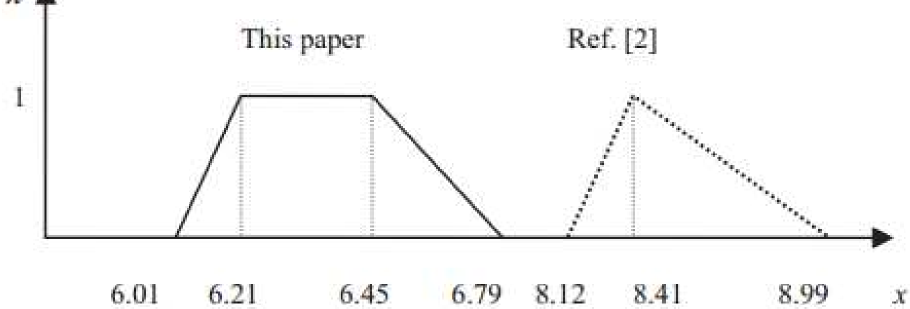
در مقایسه با (5–7، 9–10)، روش پیشنهادی در این مقاله بسیار مطمئن و پایدار است، زیرا از روش های رتبه بندیTrFNs . اجتناب می کند. به علاوه، برای احتمال قابل قبول کمینه$\beta \in [0, 1]$ ، می توان راه حل بهینه متفاوت و مقدار هدف بهینه را بدست اورید که به تصمیم گیرنده در گرفتن تصمیمات انعطاف پذیرانه کمک می کند.

جدول 4: راه حل بهینه و مقدار هدف بهینه برای مورد 3 با رویکرد های مختلف

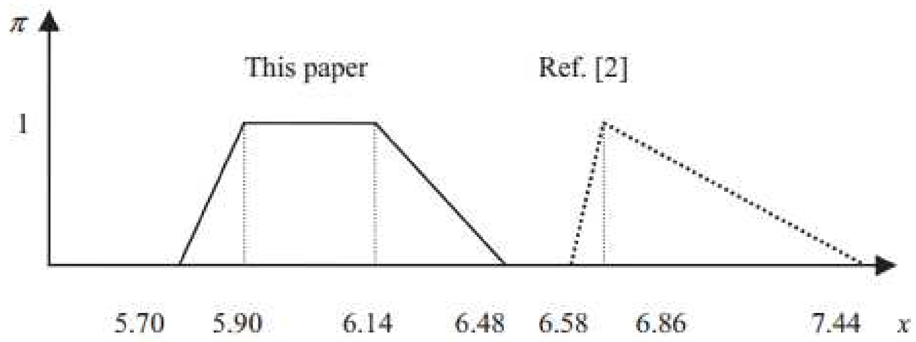
متغیر	F	M	D	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	سود بهینه
با معادله 8	0.34	0.67	0	0.35	0.54	0	0	0	0	0	0	0.15	1.61	3.59	4.75	(5.70,5.90,6.14,6.48)
با معادله 9	0.58	0.85	0	1.42	2	1.54	0	0	0	0	0	0	0	2.09	3.66	(5.48, 5.76, 6.10, 6.63)
با معادله 10																
$(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})^T$	0.82	0	0	0.46	0.81	2	1.45	0	0	0	0	0	0	0.25	2.01	(6.19,6.36,6.60,7.18)
$(\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{2}{6},\frac{1}{6})^T$	0.82	0	0	0.46	0.81	2	1.45	0	0	0	0	0	0	0.25	2.01	(6.19,6.36,6.60,7.18)
$(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)^T$	0.68	0.67	0	1.4	2	2	0.5	0	0	0	0	0	0	2.03	3.75	(6.37,6.64,6.98,7.56)
$(\frac{2}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{6})^T$	0.82	0	0	0.5	0.81	2	1.45	0	0	0	0	0	0	0.25	2.01	(6.20,6.36,6.60,7.18)



شکل 2: سود های بهینه برای مورد 1



شکل 3: سود های بهینه برای مورد 2



شکل 4: سود های بهینه برای مورد3

جدول 5: هزینه واحد، ظرفیت و تقاضا برای مسئله حمل و نقل

	بازار 1	بازار2	بازار 3	ظرفیت
Port 1	(7,8,9,10)	(5,6,7,8)	(3,4,5,6)	400
Port 2	(1,2,2.5,3)	(5,5.5,6.5,7)	(8,9,9.5,10)	300
Port 3	(6,7,7.5,8.1)	(3,4,4.8,5.4)	(2,2.8,3.5,4.2)	200
تقاضا	220	450	230	

5- کاربرد مسئله حمل و نقل

برای اثبات کارایی بالقوه روش پیشنهادی در این مقاله، مسئله حمل و نقل را در این بخش در نظر می گیریم. فرض کنید که سه پورت و سه بازار

وجود دارد. ما باید محصولات را از این سه بندرگاه به سه بازار بارگیری کنیم. هزینه های واحد تحویل از آی امین بندرگاه به جی امین بازار بر حسب دلار در سلول های مربوط به جدول 5 ارایه شده است. به دلیل پیچیدگی توابع هدف و فازی بودن تفکرات انسانی، تصمیم گیرنده به آسانی نمی تواند مقادیر عددی قطعی را برای ارزیابی هزینه های واحد در اختیار بگذارد.TrFNs ها برای بیان هزینه های واحد مهم هستند. تقاضاهای باری در هر بازار و ظرفیت بار در هر بنذر در ستون آخر جدول 5 ارایه شده اند. طرح بهینه حمل و نقل که هزینه های واحد را کمینه کند بایستی تعین شود.

اگر مقدار ترابری و یا حمل و نقل از آی امین بندر به جی امین بازار توسط $x_{ij}(i = 1,2,3; j = 1,2,3)$ نشان داده شود، برنامه نویسی خطی فازی با TrFNs به صورت ذیل فرموله می شود:

$$\begin{aligned} \min\ \tilde{z} = {} & (7,8,9,10)x_{11} + (5,6,7,8)x_{12} + (3,4,5,6)x_{13} + (1,2,2.5,3)x_{21} + (5,5.5,6.5,7)x_{22} \\ & + (8,9,9.5,10)x_{23} + (6,7,7.5,8.1)x_{31} + (3,4,4.8,5.4)x_{32} + (2,2.8,3.5,4.2)x_{33}, \end{aligned}$$
$$s.t. \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leqslant 400, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leqslant 300, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} \leqslant 200, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} \leqslant 220, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \leqslant 450, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \leqslant 230, \\ x_{ij} \geqslant 0\ (i = 1,2,3;\ j = 1,2,3). \end{cases} \qquad (22)$$

بر اساس معادلات 14 و 15، رویکرد بدبینانه را برای حل معادله 22 ارایه می کنیم. راه حل بهینه را می توان به شکل ذیل نوشت:

$$x_{11} = 0, x_{12} = 176.8806, \quad x_{13} = 150, \quad x_{21} = 220, \quad x_{22} = 0, \quad x_{23} = 80, \quad x_{31} = 0, \quad x_{32} = 200, \quad x_{33} = 0.$$

از این روی، هزینه کل $\text{TrFN } \tilde{z} = (2794.4, 3621.3, 4258.2, 4855.0)$, است که نشان می دهد محتمل ترین هزینه بین [3621.3,4258.2], است و کران های بالا و پایین هزینه کل 4855.0 و 2794.4 می باشد.

6-نتیجه گیری

این مقاله ، (TrFNs) ها برای پوشش اطلاعات غیر قطعی و غیر دقیق برای ضرایب هدف غیر دقیق و ضرایب فناوری های غیر دقیق و یا منابع موجود ارایه کرده است.برنامه نویسی چند هدفی کمکی برای حل برنامه نویسی احتمال خطی با (TrFNs) ساخته می شود.: کمینه سازی پراکندگی چپ، بیشینه سازی پراکندگی راست، بیشینه سازی نقطه نهایی چپ مد و بیشینه سازی نقطه میانی مد. سه رویکرد برای حل برنامه نویسی چند هدفی کمکی ساخته شده از جمله رویکرد خوشبینانه، رویکرد

بدبینانه و رویکرد مجموع خطی بر اساس تابع عضویت ارایه شده است. مثال سرمایه گذاری و مسئله انتقال برای اثبات فرایند اجرایی این روش ارایه می شود . آنالیز های مقایسه نشان می دهد که برنامه نویسی خطی با TrFNs در این مقاله برنامه نویسی خطی احتمال با اعداد فازی مثلثی تعمیم می دهد.

آنالیز مقایسه مسئله سرمایه گذاری نشان می دهد که برنامه نویسی خطی احتمال پیشنهادی با TrFNs، برنامه نویسی خطی احتمال را به TFNs تعمیم می دهد(2). از این روی، این مقاله سه نوع رویکرد را برای حل برنامه نویسی چند منظوره کمکی ساخته شده پیش نهاد می دهد. تصمیم کیرنده های مختلف می توانند اقدام به انتخاب روشی متفاوت بر اساس نیاز های واقعی و ترجیح ریسک کنند که به شدت بر انعطاف پذیری در

فرایند تصمیم گیری تاثیر می گذارد. اگرچه روش پیشنهادی با استفاده از مسئله سرمایه گذاری و حمل و نقل تشریح شد، انتظار می رود که به مسائل با تصمیمات واقعی زندگی در بسیاری از زمینه ها نظیر سرمایه گذاری ریسک، مدیریت مهندسی، مدیریت زنجیره عرضه قابل تعمیم باشد.

(بخش یک این مقاله، ترجمه نشده است)