عملگرهای انتگرال چاکوئت پیوسته القا شده و کاربرد آن ها در تصمیم گیری گروهی

چکیده

با توجه به تصمیم گیری گروهی چند معیاره، در این مطالعه دو عملگر انتگرال چاکوئت پیوسته موسوم به عملگر میان گین گیری وزنی چاکوئت پیوسته (ICCWA) و عملگر میانگین هندسی

چاکوئت پیوسته (ICCGM) تعریف می شود که منعکس کننده خصوصیات تعاملی بین عناصر است. در عین حال، برخی از خصوصیات مطلوب مربوطه برای ارایه اطمینان در کاربرد ها مطالعه می شوند. به منظور منعکس سازی اثرات متقابل بین عناصر، ما به تعریف بیشتر عملگر ICCWA (PGS-ICCWA) تعمیمی احتمال گرایانه و عملگرد تعمیمی ICCGM (PGS-ICCGM) می پردازیم.اگر اطلاعات در خصوص اوزان متخصصان و معیار ها به طور ناقص وجود داشته باشند، مدل های شاخص های فازی بهیته بر روی متخصصان و معیار ها بر اساس اصل پیوستکی تنظیم شده و و روشTOPSIS به ترتیب تعیین می شود. به علاوه، روشی برای تصمیم گیری گروهی چند معیاره غیر قطعی با

اطلاعات وزنی ناقص و شرایط تعاملی ایجاد می شود. در نهایت، یک مثال عددی برای تشریح عملی بودن روش ایجاد شده ارایه شده است.

2- مفاهیم پایه

2-1 برخی عملگر های تجمعی

یاگر 1988 عملگر میان گین گیری وزنی مرتب (OWA) برای تجمیع مجموع محدود از استدلالات را معرفی کرد که بعد اساسی آن مرحله مرتب سازی مجدد است. عملگر OWA(یاگر 1988) با بعد n نقشه $f: R^n \to R$ می باشد که دارای بردار وزنی مربوطه $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ است طوری که $w_j \in [0,1]$ و $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

که

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j,$$

b_j ، جی امین بزرگ ترین $a_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$، R^n و R مجموعه های N بعد اعداد حقیقی و خود اعداد حقیقی به ترتیب می باشند.

مشابه با عملگر OWA، Xu and Yager (2006) عملگر هندسی وزنی مرتب را به صورت ذیل تعریف کرد: عملگر OWG (Xu & Yager, 2006) از n بعد، نقشه $R^{n+} \rightarrow R^{+}$می باشد که با بردار وزنی نمایی خود ارتباط دارد:$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ و

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j},$$ طوری که $w_j \in [0, 1],\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1,$

که b_j،جی امین بزرک ترین $a_i\ (i = 1,2,\ldots,n)$، R^{n+} و R^+، به ترتیب مجموعه های n بعد با اعداد حقیقی مثبت و خود اعداد حقیقی مثبت می باشند.

سپس،Yager (2004b) عملگر میان گین وزنی مرتب را به صورت ذیل ارایه کرده که دارای تعریف ذیل می باشد:

تعریف 1: یاگر 2004 ب. عملگر COWA با n بعد نقشه $\Omega^+ \rightarrow R^+$ می باشد که ارتباط تنگاتنکی با تابع یکنواخت بازه واحد دارد:$Q\colon [0,1] \rightarrow [0,1]$، و این با $Q(0) = 0$ و $Q(1) = 1$ یکنواخت است طوری که

$$F_Q([a,b]) = \int_0^1 \frac{dQ(y)}{dy}(b - y(b-a))dy, \qquad (1)$$

که Ω^{+} مجموعه اعداد فاصله ای مثبت یعنی $\Omega^{+} = \{[a,b] | a,b \in \mathrm{R}^{+}, a \leqslant b\}$ است.

به علاوه، Xu and Yager (2006) عملگر متوسط وزنی مرتب را پیشنهاد کردند که به صورت ذیل تعریف شد.

تعریف 2: Xu and Yager (2006). عملگر n بعدی COWG به صورت $G: \Omega^{+} \rightarrow \mathrm{R}^{+}$ مربوط به تابع BUM است طوری که

$$G_Q([a,b]) = b\left(\frac{a}{b}\right)^{\int_0^1 \frac{dQ(y)}{dy} y\, dy}, \qquad (2)$$

که Q و Ω^{+} در تعریف 1 ارایه شده اند.

نکته 1: اگر $\lambda = \int_0^1 Q(y)dy$، آنگاه معادلات 1 و 2 را می توان با به ترتیب $F_Q([a,b]) = (1-\lambda)a + \lambda b$ و $G_Q([a,b]) = a^{1-\lambda}b^{\lambda}$ تعریف کرد.

بر اساس عملگر COWA، چن و زو (2011) عملگر OWA پیوسته $\text{ICOWA}: \Omega^{n+} \to R^{+}$ را ایجاد کردند که به صورت جمع دومین استدلالات از دو $\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle, \langle u_2,[a_2,b_2]\rangle, \dots, \langle u_n,[a_n,b_n]\rangle$ تعریف شده و به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$
\begin{aligned}
&\text{ICOWA}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle, \langle u_2,[a_2,b_2]\rangle, \dots, \langle u_n,[a_n,b_n]\rangle) \\
&\quad = \text{ICOWA}(\langle u_1, F_Q[a_1,b_1]\rangle, \langle u_2, F_Q[a_2,b_2]\rangle, \dots, \langle u_n, F_Q[a_n,b_n]\rangle) \\
&\quad = \sum_{j=1}^{n} (w_j F_Q([a_{(j)}, b_{(j)}])), \qquad (3)
\end{aligned}
$$

که Ω^{n+} مجموعه اعداد فاصله ای مثبت با n بعد، σ جایکشت بر روی $\{1,2,\dots,n\}$ است طوری که $u_{\sigma(j)} \geqslant u_{\sigma(j+1)}$، $u_{\sigma(j)}$ جی امین بزرگ

ترین عدد $u_i(i = 1,2,\ldots,n)$، $w = (w_1, w_2,\ldots,w_n)^T$، بردار وزنی مربوطه با $w_j \in [0, 1],\ \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ و $F_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}])$ به صورت معادله 1 است.

بر طبق عملگر COWG، وو و همکاران 2009 یک عملگر پیوسته $\text{ICOWG}: \Omega^{n+} \to \text{R}^+$، را ایجاد کردند که جمع مجموع دومین استدلال های $\langle u_1, [a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, [a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, [a_n, b_n]\rangle$ است که به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\begin{aligned}
&\text{ICOWG}(\langle u_1, [a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, [a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, [a_n, b_n]\rangle) \\
&\quad = \text{ICOWG}(\langle u_1, G_Q[a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, G_Q[a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, G_Q[a_n, b_n]\rangle) \\
&\quad = \prod_{j=1}^{n} G_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}])^{w_j},
\end{aligned} \tag{4}$$

که Ω^{n+} اعداد با n بعد بازه مثبت حقیقی، σ جایگشت در $\{1,2,\ldots,n\}$ می باشد طوری که $u_{\sigma(j)} \geqslant u_{\sigma(j+1)}, u_{\sigma(j)}$ جی امین بزرک

ترین مقدار $u_i(i = 1,2,\ldots,n), w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ مربوط به بردار وزنی و $w_j \in [0, 1], \sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ و $G_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}])$ می باشد که به صورت معادله 2 نشان داده می شود:

2-2 معیار فازی و انتگرال چاکوئت

در بسیاری از شرایط، عناصر موجود در یک مجموعه دارای همبستگی می باشند. از این روی، استفاده از معیار افزایشی برای اندازه گیری اهمیت آن ها نامناسب است. در Sugeno،1974 (1974) به معرفی مفهوم معیار های فازی پرداخت که ابزاری قوی برای اندازه گیری تعاملات بین عناصر است((Grabisch & Roubens, 1999; Kojadinovic, 2003, 2005) و

حل مسائل تصمیم گیری می باشد((Grabisch, 1995, Grabisch ;1996; Labreuche & Grabisch, 2003 & Labreuche, 2008; Xu, 2010; Tan & Chen, 2010, 2011).

تعریف 3:سانگ. 1974. معیار فازی μ در مجموع متناهی $N = \{1,2,\ldots,n\}$ به صورت تابع $\mu: P(N) \to [0,1]$ تحت شرابط ذیل است.

$$\begin{aligned}&(1)\ \mu(\varnothing) = 0,\ \mu(N) = 1,\\&(2)\ A \subseteq B \text{ implies } \mu(A) \leqslant \mu(B),\end{aligned}$$

که $P(N)$ مجموعه توان N است.

در تصمیم گیری چند معیاره گروهی، $\mu(A)$ می تواند به صورت اهمیت معیار مجموعه A در نظر گرفته شود. از این روی علاوه

بر اوزان واقعی در مجموعه صفات، اوزان در هر ترکیب از صفات نیز تعریف می شوند:

مشابه با معیار های فازی، انتگرال های فازی، عملگر های تجمعی مهم برای اطلاعات غیر قطعی می باشند که توسط محققان بسیاری مطالعه شده اند. (Sugeno, 1974; Grabisch, Grabisch, & Gil, 2002; Dubois ,1997; Miranda & Prade, 1988). یکی از مهم ترین انتگرال های فازی، انتگرال چاکوئت می باشد. به عنوان تعمیمی از عملگر OWA، انتگرال چاکوئت در مجموعه های گسسته به شکل ذیل تعریف می شود(گرابیش 1997).

تعریف 4: فرض کنید f تابع مقدار واقعی مثبت در $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$، و μ، شاخص اندازه گیری بر X است. انتگرال چاکوئت گسسته f w.r.t. μ به صورت ذیل تعریف می شود:

$$C_\mu(f(x_{(1)}),f(x_{(2)}),\ldots,f(x_{(n)}))=\sum_{i=1}^{n}f(x_{(i)})(\mu(A_{(i)})-\mu(A_{(i+1)})),$$

که $(\cdot)$ نشان دهنده جایگشت در $N=\{1,2,\ldots,n\}$ است طوری که

$f(x_{(1)})\leqslant f(x_{(2)})\leqslant\ldots\leqslant f(x_{(n)})$, and $A_{(i)}=\{x_{(i)},\ldots,x_{(n)}\}$, with $A_{(n+1)}=\emptyset$.

بر اساس تعریف انتگرال چاکوئت، بسیاری از عملگرهای انتگرال چاکوئت تعریف می شوند که شامل عمل گر انتگرال چاکوئت در مجموعه های فازی(یاکار 2003)، عمل گر های انتگرال چاکوئت در IFSs و IVIFSs(Tan & Chen, 2010; Tan, 2011; Xu, 2010). به علاوه، Yager (2004b) عملگر انتگرال چاکوئت تعمیم شده ذیل را تعریف کردند:

که $\gamma \in R\backslash\{0\}, (\cdot)$ نشان دهنده جایگشت در $N = \{1,2,\ldots,n\}$ بوده و $b_{(j)}$، جی امین حداقل مقدار $a_i \ (i = 1,2,\ldots,n),$ و $A_{(i)} = \{b_{(i)}, \ldots, b_{(n)}\}$ با $A_{(n+1)} = \emptyset.$ است.

دو عملگر جدید پیوسته انتگرال چاکوئت

1-3 عملگرهای ICCWA و ICCGM

بر اساس اپراتور های ICOWA و ICOWG((Chen & Zhou, 2011; Wu et al., 2009)، ما اقدام به تعریف عملگرهای ICCWA و ICCGM به شکل ذیل می کنیم.

تعریف 5: عملگر ICCWA n بعدی به صورت ICCWA می باشد. $\Omega^{n+} \rightarrow R^{+}$ به صورت مجموعه دومین استدلال از دو $\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle, \langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle$ تعریف می شود که با موارد ذیل نشان داده می شود:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ICCWA}_{\mu}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle) \\ &= \mathrm{ICCWA}_{\mu}(\langle u_1,F_Q[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,F_Q[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,F_Q[a_n,b_n]\rangle) \\ &= \sum_{j=1}^{n}((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])), \end{aligned} \qquad (5)$$

که Ω^{n+} مجموعه اعداد فاصله ای مثبت n بعدی، μ معیار فازی در $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$، σ جایشگت در $N=\{1,2,\ldots,n\}$ است طوری که $u_{\sigma(j)} \leqslant u_{\sigma(j+1)}$، $u_{\sigma(j)}$ جی امین حداقل مقدار $u_i\ (i=1,2,\ldots,n)$، $F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])$ به صورت معادله 1 و $A_{\sigma(i)}=\{[a_{\sigma(j)},$- $\sigma(i)=\{[a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}],\ldots,[a_{\sigma(n)},b_{\sigma(n)}]\}$ با $A_{\sigma(n+1)}=\emptyset$ است.

تعریف 6: عملگر ICCGM با n بعد ICCGM نقشه یابی است:

$\Omega^{n+} \to R^{+}$ تعریف شده در مجموعه دومین استدلال های

$\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle, \langle u_2,[a_2,b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n,[a_n,b_n]\rangle$ با

$\mathrm{ICCGM}_{\mu}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle, \langle u_2,[a_2,b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)$ نشان داده می شود.

$$= \mathrm{ICCGM}_{\mu}(\langle u_1, G_Q[a_1,b_1]\rangle, \langle u_2, G_Q[a_2,b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, G_Q[a_n,b_n]\rangle)$$
$$= \prod_{j=1}^{n} \left(G_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}])^{\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)})} \right), \qquad (6)$$

که Ω^{n+} مجموعه n بعد اعداد بازه ای، μ معیار فازی $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$،

، σ جایگشت در $N=\{1,2,\ldots,n\}$ می باشد طوری که $u_{\sigma(j)} \leqslant u_{\sigma(j+1)}, u_{\sigma(j)}$

جی امین حداقل مقدار $(i=1,2,\ldots,n)$ u_i ، $G_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}])$ به صورت

معادله 2 نشان داده شده و $A_{\sigma(i)} = \{[a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}], \ldots, [a_{\sigma(n)}, b_{\sigma(n)}]\}$، با $A_{\sigma(n+1)} = \emptyset$

می باشد.

وقتی، معیار فازی μ افزایشی باشد،یعنی $\mu(S)=\sum_{[a_i,b_i]\in S}\mu([a_i,b_i])$

برای هر $S\subseteq\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$، می باشد آنگاه عملگرهای ICCWA و ICCGM به ترتیب به عملگرهای ICOWA و ICOWG تبدیل می شوند.

2-3 برخی خصوصیات

فرض 1 (یکنواختی): فرض کنید که $[a_i,b_i]$ و $[a_i',b_i']\,(i=1,2,\ldots,n)$ دو مجموعه از اعداد فاصله ای مثبت باشند و μ معیار فازی $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ و $\{[a_i',b_i']\}_{i=1,2,\ldots,n}$، با $\mu(S)=\mu(T), S$ بوده و T دارای یک اندیس یکسان برای $S\subseteq\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ و $T\subseteq\{[a_i',b_i']\}_{i=1,2,\ldots,n}$ می باشد. اگر $a_i'\leqslant a_i$ و $b_i'\leqslant b_i$ برای همه $i=1,2,\ldots,n$، آنگاه

$$\begin{aligned}&\mathrm{ICCWA}_\mu(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\&\quad\geq \mathrm{ICCWA}_\mu(\langle u_1,[a'_1,b'_1]\rangle,\langle u_2,[a'_2,b'_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a'_n,b'_n]\rangle)\end{aligned}\tag{7}$$

و

$$\begin{aligned}&\mathrm{ICCGM}_\mu(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\&\quad\geq \mathrm{ICCGM}_\mu(\langle u_1,[a'_1,b'_1]\rangle,\langle u_2,[a'_2,b'_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a'_n,b'_n]\rangle).\end{aligned}\tag{8}$$

اثبات: برای معادله (7): با $a'_i \leqslant a_i, b'_i \leqslant b_i$ و $F_O([a,b]) = (1-\lambda)a + \lambda b$ که $\lambda = \int_0^1 Q(y)dy$ داریم:

$$F_Q([a_i,b_i]) \geqslant F_Q([a'_i,b'_i])$$

برای همه $i = 1, 2, \ldots, n.$

یعنی $F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}]) \geqslant F_Q([a'_{\sigma(j)},b'_{\sigma(j)}])$ برای همه $j = 1, 2, \ldots, n.$ از $\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)}) \geqslant 0$ برای همه $j = 1, 2, \ldots, n$ داریم:

$$\sum_{j=1}^{n}((\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}]))$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{n}\left((\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q\left(\left[a'_{\sigma(j)}, b'_{\sigma(j)}\right]\right)\right).$$

برای معادله 8، با $a'_i \leqslant a_i, b'_i \leqslant b_i$ و $G_Q([a,b]) = a^{1-\lambda}b^{\lambda}$، که $\lambda = \int_0^1 \dot{Q}(y)dy$

داریم:

$$G_Q([a_i, b_i]) \geqslant G_Q\left(\left[a'_i, b'_i\right]\right)$$

به ازای همه $i = 1, 2, \ldots, n.$، یعنی $G_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}]) \geqslant G_Q\left(\left[a'_{\sigma(j)}, b'_{\sigma(j)}\right]\right)$ و به ازای همه $j = 1, 2, \ldots, n.$ ، از $\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)}) \geqslant 0$ برای $j = 1, 2, \ldots, n$

داریم:

$$prod_{j=1}^{n}\left(G_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}])^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right)$$
$$\geqslant \prod_{j=1}^{n}\left(G_Q\left(\left[a'_{\sigma(j)}, b'_{\sigma(j)}\right]\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right).$$

فرض 2(ایدمپتونسی) فرض کنید $[a_i, b_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ جمع اعداد فاصله ای مثبت باشد و μ یک معیار فازی بر $\{[a_i,\ b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ است.

در صورتی که $[a_i, b_i] = [a, b]$ برای همه $i = 1, 2, \ldots, n$ آنگاه

$$\begin{aligned} &\mathrm{ICCWA}_\mu(\langle u_1, [a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, [a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, [a_n, b_n]\rangle) \\ &\quad = (1-\lambda)a + \lambda b \end{aligned} \tag{9}$$

$$\mathrm{ICCGM}_\mu(\langle u_1, [a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, [a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, [a_n, b_n]\rangle) = a^{1-\lambda} b^{\lambda}, \tag{10}$$

where $\lambda = \int_0^1 Q(y)dy.$

اثبات برای (9)، داریم:

$$\begin{aligned} &\mathrm{ICCWA}_\mu(\langle u_1, [a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, [a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, [a_n, b_n]\rangle) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n}((\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}])) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n}((\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a, b])) \\ &\quad = F_Q([a, b])\sum_{j=1}^{n}(\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)})) = F_Q([a, b]) = (1-\lambda)a + \lambda b. \end{aligned}$$

برای (10) داریم:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ICCGM}_{\mu}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&\quad=\prod_{j=1}^{n}\left(G_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right)=\prod_{j=1}^{n}(G_Q([a,b])^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})})\\
&\quad=G_Q([a,b])^{\sum_{j=1}^{n}(\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))}=G_Q([a,b])=a^{1-\lambda}b^{\lambda}.\qquad\square
\end{aligned}
$$

فرض 3(مرز): فرض کنیم که $[a_i,b_i]\,(i=1,2,\ldots,n)$ مجموعه ای از اعداد بازه ای مثبت باشد و μ معیار فازی در $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$, باشد: آنگاه

$$
\begin{aligned}
&\min_j a_j\leqslant \mathrm{ICCWA}_{\mu}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&\qquad\leqslant \max_j b_j \qquad (11)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&\min_j a_j\leqslant \mathrm{ICCGM}_{\mu}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&\qquad\leqslant \max_j b_j. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

اثبات: به ازاری همه$i=1,2,\ldots,n,$ از انجا که $F_Q([a_i,b_i])=(1-\lambda)a_i+\lambda b_i$، داریم: $a_i\leqslant F_Q([a_i,b_i])\leqslant b_i.$

از این روی، $\min_j a_{\sigma(j)} \leqslant F_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}]) \leqslant \max_j b_{\sigma(j)}$ برای همه $j = 1,2, \ldots ,n.$

، یعنی

$$\min_j a_{\sigma(j)} \leqslant F_Q([a_{\sigma(j)}, b_{\sigma(j)}]) \leqslant \max_j b_{\sigma(j)}$$

برای همه $j = 1, 2,\ldots, n.$ ، با $\sum_{j=1}^{n}(\mu(A_{\sigma(j)}) - \mu(A_{\sigma(j+1)})) = 1$، معادله 11 را بدست می آوریم: هم چنین، می توان به آسانی معادله 12 را بدست اورد:

فرض 4(خطی-1): فرض کنید که $[a_i^k, b_i^k]$ $(i = 1,2,\ldots,\ n; k = 1,2,\ldots,m)$ مجموعه ای از اعداد فاصله ای مثبت باشد و μ معیار فازی با $\{[a_i^k, b_i^k]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ باشد، $\mu(S) = \mu(T),$ S و T دارای اندیس یکسان

برای $S\subseteq\left\{\left[a_i^k,b_i^k\right]\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ و $T\subseteq\left\{\left[a_i^l,b_i^l\right]\right\}_{i=1,2,\ldots,n}, k,l=1,2,\ldots,m, k\neq l.$ و ،

آنگاه

$$\begin{aligned}&\mathrm{ICCWA}_{\mu}\left(\left\langle u_1,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_1^k,b_1^k\right]+[c,d]\right\rangle,\left\langle u_2,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_2^k,b_2^k\right]+[c,d]\right\rangle,\ldots,\right.\\&\left.\left\langle u_n,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_n^k,b_n^k\right]+[c,d]\right\rangle\right)=(1-\lambda)c+\lambda d\\&+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mathrm{ICCWA}_{\mu}\left(\left\langle u_1,\left[a_1^k,b_1^k\right]\right\rangle,\left\langle u_2,\left[a_2^k,b_2^k\right]\right\rangle,\ldots,\left\langle u_n,\left[a_n^k,b_n^k\right]\right\rangle\right)\quad(13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathrm{ICCGM}_{\mu}\left(\left\langle u_1,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_1^k,b_1^k\right]\cdot[c,d]\right\rangle,\left\langle u_2,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_2^k,b_2^k\right]\cdot[c,d]\right\rangle,\ldots,\right.\\&\left.\left\langle u_n,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_n^k,b_n^k\right]\cdot[c,d]\right\rangle\right)=c^{1-\lambda}d^{\lambda}\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\mathrm{ICCGM}_{\mu}\left(\left\langle u_1,\left[a_1^k,b_1^k\right]\right\rangle,\right.\\&\left.\left\langle u_2,\left[a_2^k,b_2^k\right]\right\rangle,\ldots,\left\langle u_n,\left[a_n^k,b_n^k\right]\right\rangle\right),\quad(14)\end{aligned}$$

که

که $\lambda=\int_0^1 Q(y)dy, \alpha_k\in R_+$ و $[c, d]$ عدد فاصله مثبت است.

اثبات: برای(13)، با معادله(5) داریم:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ICCWA}_{\mu}\left(\left\langle u_1,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_1^k,b_1^k\right]+[c,d]\right\rangle,\left\langle u_2,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_2^k,b_2^k\right]+[c,d]\right\rangle,\ldots,\right.\\
&\left.\left\langle u_n,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_n^k,b_n^k\right]+[c,d]\right\rangle\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_{\sigma(j)}^k,b_{\sigma(j)}^k\right]+[c,d]\right)\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q\left(\left[c+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k a_{\sigma(j)}^k,d+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k b_{\sigma(j)}^k\right]\right)\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))\left((1-\lambda)\left(c+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k a_{\sigma(j)}^k\right)+\lambda\left(d+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k b_{\sigma(j)}^k\right)\right)\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))\left(((1-\lambda)c+\lambda d)+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left((1-\lambda)a_{\sigma(j)}^k+\lambda b_{\sigma(j)}^k\right)\right)\right)\\
&=\left(1-\lambda)c+\lambda d+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))\left((1-\lambda)a_{\sigma(j)}^k+\lambda b_{\sigma(j)}^k\right)\right)\right.\\
&=\left(1-\lambda)c+\lambda d+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q\left(\left[a_{\sigma(j)}^k,b_{\sigma(j)}^k\right]\right)\right)\right.\\
&=\left(1-\lambda)c+\lambda d+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\mathrm{ICCWA}_{\mu}\left(\langle u_1,\left[a_1^k,b_1^k\right]\rangle,\langle u_2,\left[a_2^k,b_2^k\right]\rangle,\ldots,\langle u_n,\left[a_n^k,b_n^k\right]\rangle\right)\right..
\end{aligned}
$$

برای (14): با معادله 6 داریم:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ICCGM}_{\mu}\left(\left\langle u_1,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_1^k,b_1^k\right]\cdot[c,d]\right\rangle,\left\langle u_2,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_2^k,b_2^k\right]\cdot[c,d]\right\rangle,\ldots,\right.\\
&\left.\left\langle u_n,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_n^k,b_n^k\right]\cdot[c,d]\right\rangle\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n}\left(G_Q\left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_k[a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}]\cdot[c,d]\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n}\left(G_Q\left([c\prod_{k=1}^{m}\alpha_k a_{\sigma(j)}^k,d\prod_{k=1}^{m}\alpha_k b_{\sigma(j)}^k]\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n}\left(\left(\left(c\prod_{k=1}^{m}\alpha_k a_{\sigma(j)}^k\right)^{1-\lambda}\left(d\prod_{k=1}^{m}\alpha_k b_{\sigma(j)}^k\right)^{\lambda}\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right)\\
&=\prod_{j=1}^{n}\left(\left(c^{1-\lambda}d^{\lambda}\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_k^{1-\lambda}\left(a_{\sigma(j)}^k\right)^{1-\lambda}\prod_{k=1}^{m}\alpha_k^{\lambda}b_{\sigma(j)}^{k\ \lambda}\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1}}\right.\\
&=\prod_{j=1}^{n}\left(\left(c^{1-\lambda}d^{\lambda}\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\left(\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left(a_{\sigma(j)}^k\right)^{1-\lambda}\left(b_{\sigma(j)}^k\right)^{\lambda}\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right)\\
&=\left(c^{1-\lambda}d^{\lambda}\right)^{\sum_{j=1}^{n}(\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))}\prod_{k=1}^{m}\alpha_k^{\sum_{j=1}^{n}(\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))}\prod_{j=1}^{n}\\
&\quad\times\left(\left(a_{\sigma(j)}^k\right)^{1-\lambda}\left(b_{\sigma(j)}^k\right)^{\lambda}\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\\
&=c^{1-\lambda}d^{\lambda}\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\prod_{j=1}^{n}\left(G_Q\left(\left[a_{\sigma(j)}^k,b_{\sigma(j)}^k\right]\right)^{\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)})}\right)\\
&=c^{1-\lambda}d^{\lambda}\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\mathrm{ICCGM}_{\mu}\left(\left\langle u_1,\left[a_1^k,b_1^k\right]\right\rangle,\left\langle u_2,\left[a_2^k,b_2^k\right]\right\rangle,\ldots,\left\langle u_n,\left[a_n^k,b_n^k\right]\right\rangle\right).
\end{aligned}
$$

فرض 5 (خطی –2): فرض کنید $[a_i, b_i]\ (i = 1,2,\ldots,n)$ ترکیبی از اعداد بازه ای مثبت باشد، و $\mu_l\ (l = 1,2,\ldots,q)$ مجموعه معیارهای فازی در $\{[a_i, b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$. باشد: آنگاه

$$\mathrm{ICCWA}_{\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)$$
$$=\sum_{l=1}^{q}\beta_l \mathrm{ICCWA}_{\mu_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle) \quad (15)$$

and

$$\mathrm{ICCGM}_{\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)$$
$$=\prod_{l=1}^{q}\beta_l \mathrm{ICCGM}_{\mu_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle), \quad (16)$$

where $\beta_l \geqslant 0$ *with* $\sum_{l=1}^{q}\beta_l = 1$, *and* $\varepsilon_l \in R$.

که $\beta_l \geqslant 0$ با $\sum_{l=1}^{q}\beta_l = 1$ و $\varepsilon_l \in R$.

اثبات: برای(15)، با معادله 5 داریم:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ICCWA}_{\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l\right)(A_{\sigma(j)})-\left(\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l\right)(A_{\sigma(j+1)})\right)F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{q}\beta_l(\mu_l(A_{\sigma(j)})-\mu_l(A_{\sigma(j+1)}))\right)F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])\\
&=\sum_{l=1}^{q}\beta_l\sum_{j=1}^{n}(\mu_l(A_{\sigma(j)})-\mu_l(A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])\\
&=\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mathrm{ICCWA}_{\mu_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle).
\end{aligned}$$

برای (16)، با معادله 6 داریم:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ICCGM}_{\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&=\prod_{j=1}^{n}(G_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}]))^{(\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l)(A_{\sigma(j)})-(\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l)(A_{\sigma(j+1)})}\\
&=\prod_{j=1}^{n}(G_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}]))^{\sum_{l=1}^{q}\beta_l(\mu_l(A_{\sigma(j)})-\mu_l(A_{\sigma(j+1)}))}\\
&=\prod_{l=1}^{q}\beta_l\prod_{j=1}^{n}(G_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])^{\sum_{l=1}^{q}\beta_l(\mu_l(A_{\sigma(j)})-\mu_l(A_{\sigma(j+1)}))})\\
&=\prod_{l=1}^{q}\beta_l\mathrm{ICCGM}_{\mu_l}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle).
\end{aligned}$$

استنباط 1-فرض کنید $\left[a_i^k, b_i^k\right]\ (i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, m)$ مجموعه ای از اعداد مثبت فاصله ای باشد و $\mu_l\ (l = 1, 2, \ldots, q)$ مجموعه فازی در $\left\{\left[a_i^k, b_i^k\right]\right\}_{i=1,2,\ldots,n}$ با $\mu(S) = \mu(T),$ باشد، و S و T دارای اندیس مشابه برای $S \subseteq \{[a_i^k, b_i^k]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ و $T \subseteq \{[a_i^r, b_i^r]\}_{i=1,2,\ldots,n},\ k, r = 1, 2, \ldots, m, k \neq r$ باشند؛ آنگاه

$$\mathrm{ICCWA}_{\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l}\Bigg(\Bigg\langle u_1,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_1^k,b_1^k\right]+[c,d]\Bigg\rangle,$$
$$\Bigg\langle u_2,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_2^k,b_2^k\right]+[c,d]\Bigg\rangle,\ldots,\Bigg\langle u_n,\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_n^k,b_n^k\right]+[c,d]\Bigg\rangle\Bigg)$$
$$=(1-\lambda)c+\lambda d+\sum_{l=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_l\mathrm{ICCWA}_{\mu_l}\Big(\Big\langle u_1,\left[a_1^k,b_1^k\right]\Big\rangle,$$
$$\Big\langle u_2,\left[a_2^k,b_2^k\right]\Big\rangle,\ldots,\Big\langle u_n,\left[a_n^k,b_n^k\right]\Big\rangle\Big)$$

and

$$\mathrm{ICCGM}_{\sum_{l=1}^{q}\beta_l\mu_l+\varepsilon_l}\Bigg(\Bigg\langle u_1,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_1^k,b_1^k\right]\cdot[c,d]\Bigg\rangle,$$
$$\Bigg\langle u_2,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_2^k,b_2^k\right]\cdot[c,d]\Bigg\rangle,\ldots,\Bigg\langle u_n,\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\left[a_n^k,b_n^k\right]\cdot[c,d]\Bigg\rangle\Bigg)$$
$$=c^{1-\lambda}d^{\lambda}\prod_{l=1}^{q}\prod_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_l\mathrm{ICCGM}_{\mu_l}\Big(\Big\langle u_1,\left[a_1^k,b_1^k\right]\Big\rangle,\Big\langle u_2,\left[a_2^k,b_2^k\right]\Big\rangle,\ldots,$$
$$\Big\langle u_n,\left[a_n^k,b_n^k\right]\Big\rangle\Big),$$

که تفاسیر آن در فرض های 4 و 5 ارایه شدند.

تعریف 7: اگر μ معیار فازی بر روی $N=\{1,2,\ldots,n\}$ باشد. یک عنصر $i\in N$ در صورتی غیر ضروری است که $\mu(S\cup i)=\mu(S)$ برای

$\mu(S \cup i) = \mu(S) + \mu(i)$ در صورتی مستقل است که $i \in N$ باشد و $S \subseteq N \setminus i,$

برای هر $S \subseteq N \setminus i.$ باشد.

از تعریف عناصر غیر ضروری، اگر مولفه I غیر ضروری باشد، سهم ان در ترکیبات دیگر $S \subseteq N \setminus i$، برابر با 0 خواهد بود. اگر مولفه i مستقل باشد، سهم آن در   مجموعه های دیگر $S \subseteq N \setminus i$ برابر با اهمیت آن است.

فرض 6: اگر $[a_i, b_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ترکیبی از اعداد مثبت بازه ای باشد و μ معیار فازی در $\{[a_i, b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ باشد. اگر $[a_p, b_p] \in \{[a_i, b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ مولفه مستقل باشد: آنگاه

$$\begin{aligned}
&\text{ICCWA}_\mu(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&\quad=\text{ICCWA}_\mu(\ldots,\langle u_{p-1},[a_{p-1},b_{p-1}]\rangle,\langle u_{p+1},[a_{p+1},b_{p+1}]\rangle,\ldots)\\
&\qquad+\mu([a_p,b_p])F_Q([a_p,b_p])
\end{aligned}\tag{17}$$

and

$$\begin{aligned}
&\text{ICCGM}_\mu(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&\quad=G_Q([a_p,b_p])^{\mu([a_p,b_p])}\text{ICCGM}_\mu(\ldots,\langle u_{p-1},[a_{p-1},b_{p-1}]\rangle,\\
&\qquad\langle u_{p+1},[a_{p+1},b_{p+1}]\rangle,\ldots).
\end{aligned}\tag{18}$$

اثبات:برای (17)، داریم:

$$\begin{aligned}
&\text{ICCWA}_\mu(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&\quad=\sum_{j=1}^{n}((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}]))\\
&\quad=\sum_{j=1,j\neq p}^{n}((\mu(A_{\sigma(j)})-\mu(A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}]))\\
&\qquad+\mu([a_p,b_p])F_Q([a_p,b_p])\\
&\quad=\text{ICCWA}_\mu(\ldots,\langle u_{p-1},[a_{p-1},b_{p-1}]\rangle,\langle u_{p+1},[a_{p+1},b_{p+1}]\rangle,\ldots)\\
&\qquad+\mu([a_p,b_p])F_Q([a_p,b_p]).
\end{aligned}$$

به طور مشابه می توان معادله 18 را بدست اورد.

استنباط 2: اگر $[a_i, b_i]\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ مجموعه ای از اعداد حقیقی مثبت باشد و μ معیار فازی بر $\{[a_i, b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ باشد، اگر $[a_p, b_p] \in \{[a_i, b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$ یک مولفه غیر ضروری باشد داریم:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ICCWA}_\mu(\langle u_1, [a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, [a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, [a_n, b_n]\rangle) \\
&\quad = \mathrm{ICCWA}_\mu(\ldots, \langle u_{p-1}, [a_{p-1}, b_{p-1}]\rangle, \langle u_{p+1}, [a_{p+1}, b_{p+1}]\rangle, \ldots) \\
&\textit{and} \\
&\mathrm{ICCGM}_\mu(\langle u_1, [a_1, b_1]\rangle, \langle u_2, [a_2, b_2]\rangle, \ldots, \langle u_n, [a_n, b_n]\rangle) \\
&\quad = \mathrm{ICCGM}_\mu(\ldots, \langle u_{p-1}, [a_{p-1}, b_{p-1}]\rangle, \langle u_{p+1}, [a_{p+1}, b_{p+1}]\rangle, \ldots).
\end{aligned}$$

4 – عملگر های PGS-ICCWA و PGS-ICCGM

اگرچه عمل گر های ICCWA و ICCGM منعکس کننده ارتباط بین عناصر می باشند، هیچ گونه معیار فازی را در مجموعه ندارند. به علاوه آن ها تنها اثرات متقابل را بین دو

ائتلاف مجاور $A_{\sigma(i)}$ و $A_{\sigma(i+1)}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, منعکس می کردند که به نظر می رسد غیر منطقی است.

1-4 نیم مقدار تعمیم یافته احتمال گرایانه

به منظور اندازه گیری میزان پایداری روابط در بازی به جای تک تک بازیکنان، مارشال(2000) یک نیم مقدار تعمیم یافته احتمال گرایانه را در مجموعه متناهی از $N = \{1,2,\ldots,n\}$ ارایه کرد:

$$\varphi_p(\mu, S) = \sum_{T \subseteq N \setminus S} p_t^s(n)(\mu(T \cup S) - \mu(T)), \qquad (19)$$

که $\sum_{t=0}^{n-s} C_{n-s}^t p_t^s(n) = 1$ برای $S,T \subseteq N$ با $S \cap T \neq 0, s, t$ و n نشان دهنده کاردینالیتی به ترتیب s، T و n است.

برای هر $S \subseteq N,$، معادله 19 یک مقدار مورد انتظار از سهم حاشیه ای بین ائتلاف S و $T \subseteq N\backslash S$ است.

قضیه 1: فرض کنیدμ، شاخص فازی در هر مجموعه متناهی $N = \{1,2,...,n\}$ باشد، آنگاه φ_p به صورت معادله 19 به عنوان معیار فازی در نظر گرفته می شود.

اثبات: با معادله 19، به آسانی $\varphi_p(\mu,\emptyset) = 0$ و $\varphi_p(\mu,N) = \mu(N) = 1.$ را بدست می اوریم. در ذیل، ما $\varphi_p\ (\mu,A) \leqslant \varphi_p(\mu,B)$ را برای همه $A,\ B \subseteq N,$ با $A \subset B.$ نشان می دهیم.

مورد 1، وقتی $a = b - 1,$ با a و b، کاردینالیتی های a و b می باشند. بدون افت عمومیت، فرض کنید :$A \cup i = B.$.

از معادله 19 داریم:

$$\begin{aligned}\varphi_p(\mu, A) &= \sum_{T\subseteq N\backslash A} p_t^a(n)(\mu(T\cup A)-\mu(T))\\ &= \sum_{T\subseteq N\backslash A\cup i} p_t^a(n)(\mu(T\cup A)-\mu(T)) + \sum_{T\subseteq N\backslash A\cup i} p_{t+1}^a(n)(\mu(T\cup A\cup i)-\mu(T\cup i))\\ &= \sum\nolimits_{T\subseteq N\backslash A\cup i}(p_t^a(n)(\mu(T\cup A)-\mu(T)) + p_{t+1}^a(n)(\mu(T\cup A\cup i)-\mu(T\cup i)))\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\varphi_p(\mu, B) &= \sum_{T\subseteq N\backslash B} p_t^b(n)(\mu(T\cup B)-\mu(T))\\ &= \sum_{T\subseteq N\backslash A\cup i} p_t^{a+1}(n)(\mu(T\cup A\cup i)-\mu(T)).\end{aligned}$$

زیرا

$\sum_{t=0}^{n-a-1} C_{n-a-1}^t\left(p_t^a(n)+p_{t+1}^a(n)\right)=1$ and $\sum_{t=0}^{n-b} C_{n-b}^t p_t^b(n) = \sum_{t=0}^{n-a-1} C_{n-a-1}^t p_t^{a+1}(n) = 1$ داریم:

$$p_t^a(n)+p_{t+1}^a(n)=p_t^{a+1}(n)$$

برای هر $T\subset N\backslash A\cup i.$:

چون: $\mu(T \cup A \cup i) \geqslant \mu(T \cup A)$ and $\mu(T) \leqslant \mu\,(T \cup i)$،

$$\begin{aligned}
&p_t^a(n)(\mu(T \cup A) - \mu(T)) + p_{t+1}^a(n)(\mu(T \cup A \cup i) - \mu(T \cup i)) \\
&\leqslant p_t^a(n)(\mu(T \cup A \cup i) - \mu(T)) + p_{t+1}^a(n)(\mu(T \cup A \cup i) - \mu(T)) \\
&= \left(p_t^a(n) + p_{t+1}^a(n)\right)(\mu(T \cup A \cup i) - \mu(T)) \\
&= p_t^{a+1}(n)(\mu(T \cup A \cup i) - \mu(T)) = p_t^b(n)(\mu(T \cup b) - \mu(T))
\end{aligned}$$

یا $T \subseteq N \backslash A \cup i.$.

از این روی، $\varphi_p(\mu,A) \leqslant \varphi_p(\mu,B)$ برای $A,B \subseteq N$ با $a = b - 1$،

مورد 2 برای $A,\, B \subseteq N,$ بدون افت عمومیت، فرض کنید:

$a = b - q(q \leqslant n - a)$ و $A \cup \{i_i, i_2, \ldots, i_q\} = B.$

فرض کنید: $A_1 = A \cup \{i_1\}, A_2 = A_1 \cup \{i_2\}, \ldots, A_q = A_{q-1} \cup \{i_q\}$

از مورد 1، داریم:"

$$\varphi_p(\mu, A) \leqslant \varphi_p(\mu, A_1) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_p(\mu, A_q) = \varphi_p(\mu, B).$$

$\varphi_p(\mu,A) \leqslant \varphi_p(\mu,B)$ برای همه $A,\ B \subseteq N, A \subseteq B$ صادق است. از تعریف 3، نتیجه ذیل را داریم.

از قضیه 1، داریم $\{\varphi_p(\mu,A_{(i)}) - \varphi_p(\mu,A_{(i+1)})\}_{i\in N}$، بردار وزنی بر $N = \{1,2,\ldots,n\}$ است که $A_{(i)} = \{i,\ldots,n\}$ با $A_{(n+1)} = \emptyset$.

با جایگزینی معیار فازی با نیم مقدار تعمیم یافته احتمال گرایانه با عملگراهای ICCWA و ICCGM، عملگر PGS-ICCWA) ICCWA) و عملگر ICCGM (PGS-ICCGM به شکل ذیل است:

تعریف 8: اپراتور PGS-ICCWA با n بعد $\mathrm{PGS\text{-}ICCA}:\Omega^{n+} \rightarrow \mathrm{R}^+$ می باشد که بر مجموعه دومین استدلال ها از دو تاپل

$\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle$ تعریف می شود که با مورد ذیل نشان داده می شود:

$$\begin{aligned}&\text{PGS-ICCWA}_{\varphi_p}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\&\quad=\text{PGS-ICCWA}_{\varphi_p}(\langle u_1,F_Q[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,F_Q[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,F_Q[a_n,b_n]\rangle)\\&\quad=\sum_{j=1}^{n}\Big((\varphi_p(\mu,A_{\sigma(j)})-\varphi_p(\mu,A_{\sigma(j+1)}))F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])\Big),\end{aligned}\tag{20}$$

که Ω^{n+}، مجموعه n عدد فاصله ای مثبت، φ_p مقدار نیمه تعمیم یافته احتمال گرایانه w.r.t.ف معیار فازی μ در $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$، σ جایگشت در $N=\{1,2,\ldots,n\}$ است طوری که $u_{\sigma(j)}\leqslant u_{\sigma(j+1)}$، $u_{\sigma(j)}$ جی امین حداقل مقدار $u_i\ (i=1,2,\ldots,n)$، $F_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])$ است که به صورت معادله 1 می باشد و $A_{\sigma(i)}=\{[a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}],\ldots,[a_{\sigma(n)},b_{\sigma(n)}]\}$، با $A_{\sigma(n+1)}=\emptyset$ است.

تعریف 9: عمل گر PGS-ICCGM با n بعد به صورت PGS-ICCGM است: $\Omega^{n+} \to R^{+}$ تعریف شده در مجموعه دومین استدلال ها از دو تاپل $\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle$ می باشد.

$$\begin{aligned}
&\text{PGS-ICCGM}_{\varphi_p}(\langle u_1,[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,[a_n,b_n]\rangle)\\
&\quad=\text{PGS-ICCGM}_{\varphi_p}(\langle u_1,G_Q[a_1,b_1]\rangle,\langle u_2,G_Q[a_2,b_2]\rangle,\ldots,\langle u_n,G_Q[a_n,b_n]\rangle)\\
&\quad=\sum_{j=1}^{n}G_Q([a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}])^{\varphi_p(\mu.A_{\sigma(j)})-\varphi_p(\mu.A_{\sigma(j+1)})},
\end{aligned} \tag{21}$$

که Ω^{n+} مجموع n بعد با اعداد بازه مثبت است، φ_p، مقدار تعمیم یافته احتمال گرایانه w.r.t.، μ معیار فازی در $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,2,\ldots,n}$، σ جایگشت در $N=\{1,2,\ldots,n\}$ است طوری که $u_{\sigma(j)} \leqslant u_{\sigma(j+1)}, u_{\sigma(j)}$ جی امین حداقل مقدار $u_i\ (i=1,2,\ldots,n)$، $G_Q([a_{\sigma(j)},-\ b_{\sigma(j)}])$ می باشد که به صورت معادله 2 بوده و $A_{\sigma(i)}=\{[a_{\sigma(j)},b_{\sigma(j)}],\ldots,[a_{\sigma(n)},b_{\sigma(n)}]\}$ با $A_{\sigma(n+1)}=\emptyset$.

با توجه به قضیه 1، φ_p معیار فازی به این معنی است که عمل گر های PGS-ICCWA و PGS- ICCGM خصوصیات مطالعه شده در بخش 3–2 را دارندو وقتی هر $[a_i, b_i]\ (i = 1,2,\ldots,n)$ به یک عدد واقعی تنزل می یابد، یعنی $a_i = b_i$، عمل گر های تجمع را بدست می اوریم:

عملگر میان گین گیری وزنی چاکوئت نیمه مقدار تعمیم یافته احتمال گرایانه:

$$\text{PGS-ICWA}_{\varphi_p}(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}((\varphi_p(\mu, A_{\sigma(j)}) - \varphi_p(\mu, A_{\sigma(j+1)}))a_{\sigma(j)}).$$

عملگر(PGS-ICGM) متوسط هندسی چاکوئت نیمه مقدار احتمال گرایانه به شکل ذیل است:

$$\text{PGS-ICGM}_{\varphi_p}(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)}^{\varphi_p(\mu A_{\sigma(j)}) - \varphi_p(\mu A_{\sigma(j+1)})}.$$

7- نتیجه گیری

ما به بررسی عمل گر های انتگرال چاکوئت احتمال گرایانه تعمیم یافته پرداختیم که روابط میان عناصر را در یک مجموعه در نظر می کیرد. در صورتی که همبستکی بین عناصر در یک مجموعه نباشد، عمل گراهای معرفی شده به انواع متناظر پیوسته بر اساس شاخص های دیگر کاهش یافتند. در عین حال، برخی از خواص مطلوب نظیر یکنواختی، ایدمپوتنسی، مرز و خطی برای اطمینان از کاربرد ها مطالعه شدند. به دلیل، پیچیدگی و عدم قطعیت مسائل تصمیم گیری دنیای واقعی و ماهیت عینی

تفکر بشری، اطلاعات در خصوص بردار وزنی کم تر شناخته شده است. برای حل این مسئله، مدل های بردارهای وزنی بهینه در خصوص مجموعه معیار ها و مجموعه متخصص بر اساس تابع شارپلی، اصل پیوستگی و روش TOPSIS است. در نتیجه، این خود روشی را برای تصمیم گیری چند معیاره غیر قطعی با اطلاعات وزنی ناقص و شرایط تعاملی در اختیار گذاشته است که جدید و متفاوت با روش های موجود است.

معیار های فازی و انتگرال های فازی، به عنوان ابزارهای قوی منعکس کننده اثرات متقابل و اطلاعات فازی تجمعی، به ما دیدگاه جدیدی برای مطالعه مسائل تصمیم گیری می دهد.

اگرچه معیار فازی ابزاری قوی برای منعکس کردن روابط متقابل بین عناصر در یک مجموعه است، با این حال بر اساس مجموعه توان تعریف می شود. محاسبه معیار فازی از هر ترکیب مجموعه در صورت بزرگ بودن آن آسان نیست. بررسی اثرات متقابل بین عناصر در یک مجموعه با استفاده از معیار های فازی، جهت ساده سازی پیچیدگی حل معیار های فازی جالب است. به علاوه، ما در این جا تنها عمل گر های انتگرال چاکوئت را در نظر گرفتیم که برای مطالعات عمل کر های تجمعی بر اساس دیگر انتگرال های فازی مناسب است.

لازم به خاطر نشان است که این مقاله تنها به بررسی کاربرد عمل گر های تجمعی تعریف شده و ایجاد مدل هایی برای بردار های وزنی در تصمیم گیری چند معیاره غیر قطعی می پردازد. به همین ترتیب، می توان از آن ها در برخی زمینه های دیگر نظیر آموزش، بهداشت و درمان، نظامی، مهندسی، علوم اجتماعی و اقتصاد بهره برد.

(بخش 1 این مقاله ترجمه نشده است)