محاسبه عدد وینر و شاخص های هایپر وینرگراف های کیلی واحد

چکیده :

گراف کیلی واحد X_n دارای مجموعه راس $Z_n = \{0, 1,\ldots, n\text{-}1\}$ بوده و رئوس u و V همسایه هستند اگر $\gcd(u-v, n) = 1$. باشد. در منبع انرژی گراف های کیلی واحد، جبر خطی، 2009، انرژی گراف های کیلی واحد محاسبه شده است. در این مقاله شاخص وینر و هایپر وینر Xn محاسبه می شود

کلمات کلیدی: گراف های کیلی واحد، شاخص وینر، شاخص هایپر وینر

1-مقدمه

فرض کنید که H یک گراف همبند با به ترتیب مجموعه رئوس و یال های ,V(H) and E(H) باشد. طبق معمول، فاصله بین رئوس U و V از H با $d(u,v)$ نشان داده شده و به صورت تعداد یال ها در یک مسیر حداقل متصل به رئوس U و V تعریف می شود.

یک شاخص توپولوژیکی ، عدد حقیقی مربوط به گراف است. این بایستی از نظر ساختاری ثابت باشد. یعنی با اتومورفیسم گراف حفظ می شود. چندین شاخص توپولوژیکی   تعریف شده اند و برخی از آن ها دارای کاربرد هایی به عنوان ابزاری برای مدل سازی خواص شیمیایی، دارویی و سایر حواص مولکولی می باشند. شاخص وینر W یکی از رایج ترین شاخص توپولوژیکی است. این برابر با مجموع فواصل بین همه جفت رئوس گراف متناظر (11) است.

شاخص هایپر وینر توسط کلین و همکاران(9) پیشنهاد شده است، که تعمیمی از شاخص وینر گراف است. این به صورت $WW(G)=1/2W(G)+1/2\sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v)^2$ تعریف می شود.   شما می توانید به خواص ریاضی شاخص هایپر واینر و کاربرد آن در شیمی مراجعه کنید.

فرض کنید که G یگ گروه مضربی با مقدار 1 باشد. به ازای $S\subseteq G$; ، $1\notin S$ و $S^{-1}=\{s^{-1} \mid s\in S\}=S$

گراف کیلی $X=Cay(G;S)$ ، مجموعه شاخص گراف غیر هم بند $V(X)=G$ و مجموع یال $E(X)=\{\{a,b\} \mid ab^{-1}\in S\}$ باشد. گر اف کیلی X، دارای درجه منظم $|S|$ است. اجزای هم بند

آن، بخش های صحیحی از زیر گروه تولید شده توسط S می باشند. از این روی X هم بند است اگر S تولید G کند. بیشتر اطلاعات در خصوص گراف های هم بند را می توان در کتب مربوط به تئوری گراف جبری بیگس(1) یافت.

برای عدد صحیح مثبت $n>1$، گراف کیلی واحد $X_n = Cay(Z_n;U_n)$ با گروه افزایشی حلقه Z_n از ماژول عدد صحیح n و گروه n و گروه مضربی Un از واحد آن تعریف می شود. اگر مولفه های Z_n را با اغداد صحیح $0, 1,\ldots, n-1,$ نشان دهیم، آنگاه می توان گفت که $U_n=\{a\in Z_n \mid gcd(a,n)=1\}$ است. از این روی X_n دارای مجموعه راس $V(X_n)=Z_n=\{0, 1, \ldots , n-1\}$ بوده و این که $ab\in E(X_n)$ است اگر و تنها اگر $gcd(a-b,n)=1$باشد. X_n دارای درجه منظم $|U_n|=\varphi(n)$ می باشد که در آن $\varphi(n)$ به معنی تابع اویلر است. اگر $n=p$ عدد اول باشد، سپس $X_n=K_p$ گراف کامل بر روی رئوس p است. اگر $n = p^t$ توان اول باشد، انگاه X_n یک گراف کامل است. در این مقاله فرمول محاسبه شاخص هایپر وینر از گراف های کیلی واحد ارایه می شود.

در قضیه زیر، ویژگی های کیلی واحد معرفی می شود.

قضیه 1: تعداد همسایه های مشترک با رئوس متفاوت a-b در گراف کیلی واحد X_n با $F_n(a-b)$ نشان داده می شود که در آن برای اعداد صحیح n، s داریم

$$F_n (s) = n\prod_{p|n} (1-\frac{g(p)}{p})$$

و p یک عدد اول بوده و $g(p) = \begin{cases} 1 & p \mid s \\ 2 & \text{otherwise} \end{cases}.$ است.

قضیه 2: گراف کیلی واحد $X_n, n\geq 2,$ دو قسمتی است اکر n زوج باشد.

2- **شاخص هایپر وینر از گراف های کیلی واحد**

در این بخش، شاخص هایپر وینر از گراف X_n محاسبه شد. فرض کنید که $d_G(v)$، مجموع فواصل بین v و همه رئوس دیگر G باشد. انگاه

$$W(G) = \Sigma_{\{v,u\} \subseteq V(G)} d(v,u) = 1/2 \Sigma_{v \in V(G)} d_G(v)$$

$$WW(G) = 1/4 \Sigma_{v \in V(G)} (\Sigma_{u \in V(G)} d \quad (v,u) + d \quad (v,u)^2).$$

قضیه 1: شاخص وینر از گراف کیلی واحد X_n به صورت زیر است

$$W(X_n) = \begin{cases} 1/2n(n-1) \\ 3/4n^2 - n \\ n^2 - 1/2n\varphi(n) - n \\ 5/4n^2 - n\varphi(n) - n \end{cases}$$

اگر n عدد اول باشد

اگر $n = 2^\alpha$ و $\alpha > 1$ باشد

اگر n فرد باشدولی عدد اول نباشد

اگر n زوج باشدولی مقسوم علیه اول فرد نباشد

اثبات: اگر n عدد اول باشد، آنگاه، $X_n=K_n$ یک گراف کامل است و $d(u,v)=1$ به ازای هر u,v می باشد آنگاه با تعریف شاخص وینر، داریم: $W(X_n)=|E(X_n)|=1/2n(n-1)$ اگر $n = 2^\alpha$ و $\alpha > 1$ باشد آنگاه X_n، گراف دو قسمتی کامل با بخش راس $V(X_n)=\{0,2,\dots,n-2\} \cup \{1,3,\dots,n-1\}$ است.

از این روی، $W(X_n)= W(K_{2^{\alpha-1},2^{\alpha-1}}) =3/4n^2-n.$ است.

فرض کنید که n عدد فرد باشد، ولی عدد اول نباشد. فرض کنید که $p_1, p_2, \dots, p_t$ مقسوم علیه اول n، $n = p_1^{r_1} \times p_2^{r_2} \times \dots \times p_t^{r_t}$ و $p_i \neq 2,\ 1 \leq i \leq t$ باشد. بر اساس قضیه 1، تعدادهمسایه های مشترک رئوس $a \neq b$ برابر با $F_n(a-b)$ بوده وبر اساس تعریف $F_n(s)$ف همه ضرایب در $F_n(a-b)$ مثبت

هستند. در این صورت، یک همسایه مشترک برای هر جفت راس مجزا وجود دارد که اشاره به $d(a,b)=1 \text{ or } d(a,b)=2$ دارد.

از این روی داریم

$$\begin{aligned} W(X_n) &= 1/2\sum_{v\in V(X_n)} d_G(v) = 1/2\sum_{v\in V(X_n)}\left(\sum_{u\in V(X_n)} d(v,u)\right) = 1/2\sum_{v\in V(G)}\left(\sum_{uv\in E(X_n)} 1 + \sum_{uv\notin E(X_n)} 2\right) \\ &= 1/2\sum_{v\in V(X_n)}(\varphi(n) + 2(n-\varphi(n)-1)) = 1/2\,2n(-\varphi(n)+2n-2) \\ &= n^2 - 1/2\,n\varphi(n) - n \end{aligned}$$

در نهایت، موردی را در نظر می گیریم که در آن n زوج بودهو دارای یک مقسوم علیه عدد فرد $p,\ n \neq 2^{\alpha}$ است. بر اساس قضیه 2، X_n یک گراف دو قسمتی با بخش راس $V(X_n)=A\cup B$، است که در آن $A = \{0,2, \ldots , n\text{-}2\}$ و $B = \{1,3, \ldots , n\text{-}1\}$ است. از این روی، برای محاسبه شاخص وینر، محاسبه $d_G(u)$ برای هر $u\in V(X_n)=A\cup B$ کافی است. برای محاسبه $d_G(u)$، دومورد را در نظر می گیریم که $u\in A$ یا $u\in B$ است. اگر $u,v\in A$ باشد،آنگاه رئوس u و v از X_n همسایه نمی باشند و یک همسایه مشترک دارند و از این روی $d(u,v)=2$ است/. اگر $u\in A$ و $v\in B$ باشد، آنگاه همه همسایه های $\varphi(n)$ از u در B قرار دارند. فرض کنید که $B=B_1\cup B_2$، باشد که در آن $B_1=\{v\in B \mid uv\in E(X_n)\}$ و $B_2=\{v\in B \mid uv\notin E(X_n)\}$ است. به ازای $u\in A$ و $v\in B_2,\ d(u,v)=3$ است. برای انجام این کار، فرض می شود که $w\in B_1,\ uw\in E(X_n)$ می باشد. اکنون W و V هر دو فرد بوده و دارای یک همسایه مشترک $z\in A$ است که اشاره به $d(u,v)=3$ دارد. به این ترتیب داریم

$$\begin{aligned} d_G(u) &= \sum_{v\in V(X_n)} d(u,v) = \sum_{v\in A} d(u,v) + \sum_{v\in B} d(u,v) \\ &= \sum_{v\in A} 2 + \sum_{v\in B_1\cup B_2} d(u,v) = 2(n/2-1) + \sum_{v\in B_1} 1 + \sum_{v\in B_2} 3 \\ &= 2(n/2-1) + \varphi(n) + 3(n/2-\varphi(n)) \\ &= 5/2n - 2\varphi(n) - 2 \end{aligned}$$

به طور مشابه اگر $u\in B$ باشد؛ انگاه، $d_G(u) = 5/2n - 2\varphi(n) - 2$ است و داریم

$$\begin{aligned} W(X_n) &= 1/2\sum_{u\in V(X_n)} d_G(u) = 1/2\sum_{u\in A\cup B} d_G(u) \\ &= 1/2\sum_{u\in A} 5/2n - 2\varphi(n) - 2 + 1/2\sum_{u\in B} 5/2n - 2\varphi(n) - 2 \\ &= 1/2n(5/2n - 2\varphi(n) - 2) = 5/2n^2 - n\varphi(n) - n \end{aligned}$$

که تکمیل کننده اثبات است.

نتیجه: شاخص هایپر وینر از گراف کیلی Xn به صورت زیر است

$$WW(X_n) = \begin{cases} 1/4n^2(n-1) \\ n^2 - 3/2n \\ n^2 - 1/2n\varphi(n) - n \\ 1/4n^2 - 5/2n\varphi(n) - 3/2n \end{cases}$$

اگر n عدد اول باشد

اگر $n = 2^\alpha$ و $\alpha > 1$ باشد

اگر n عدد فرد باشد.، ولی فرد نباشد

اگر n زوج باشد ولی   مقسوم علیه اول فرد داشته باشد

اثباتکاثبات بر اساس قضیه 1 قابل تایید است.