جنبه محاسباتی نزدیکترین ماتریکس با دو مقدار مختصات معین

چکیده

با توجه به یک ماتریکس مربع پیچیده و دو اعداد پیچیده $\lambda 1$ و $\lambda 2$، ما یک روش برای محاسبه فاصله از A به مجموعه ای از ماتریکسهای X که $\lambda 1$ و $\lambda 2$ دارند بعنوان بعضی از مقادیر خاص خود، ارائه می دهیم. ما همچنین نزدیکترین ماتریس X را پیدا می کنیم.

1.مقدمه

در مقاله اخیر [1]، Malyshev فرمول زیر را برای فاصله rsep (A) 2-norm از یک ماتریکس پیچیده ی n × n به نزدیک ترین ماتریکس با مختصات چندگانه بدست آورد:

$$G(\gamma) = \begin{pmatrix} \lambda I - A & \gamma I \\ 0 & \lambda I - A \end{pmatrix},$$

و (($\sigma 2n-1$ (G (γ مقدار مفرد ماقبل آخراز ماتریکس G است، فرض بر این است که مقادیر مفرد با ترتیب کاهشی شماره گذاری میشوند.ایکراموف و نظری برای فرمول s’Malyshevاصلاحیه بیان کردند وقتی A ماتریکس نرمال باشد. لیپرت تعمیمی برای مساله ی s’Malyshev ارایه داد . پیدا کردن $\| \Delta M \|_2$،انحراف مطلوب از M که $M - \Delta M$دارای دو مختصات داده شده، میباشد.در سال 2005، Gracia [2] فرمول (1) را برای دو مقادیرمختصات معین داده شده در قضایای زیر گسترش داد.

قضیه 1

اگر $\gamma^* > 0$ اپتیمایزر مکانی تابع $f(\gamma) = \sigma_{2n-1}(F(\gamma))$، باشد:

$$\sigma^* = f(\gamma^*) > 0,$$

پس یک جفت بردار مفرد نرمال وجود دارد که با مقدار مفرد $\sigma^* \, of F(\gamma^*)$ یعنی بردار چپ مرتبط است.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_1, u_2 \in \mathbf{C}^n$$

و بردار متناظر راست

$$v = \frac{1}{\sigma^*} F(\gamma^*)^* u = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad v_1, v_2 \in \mathbf{C}^n$$

به این صورت که

$$\mathrm{Re}(u_1^* v_2) = 0.$$

بنابراین ماتریکس ها عبارتند از

$$U = (u_1 \quad u_2), \quad V = (v_1 \quad v_2)$$

با این رابطه مرتبط است

$$U^* U = V^* V.$$

قضیه 2.

اگر γ^* در قضیه 1 ، عدد مثبت باشد، دو ماتریکس در (3)، رتبه ی 2 را دارند . ماتریکس $B = A + \Delta, where$ که

$$\Delta = \sigma^* U V^\dagger,$$

نزدیک ترین ماتریکس به A است که $\lambda_1 \; and \; \lambda_2$ ، را دارد

$$\|\Delta\|_2 = \sigma^*.$$

در زیر برخی از مسائل مربوط به اجرای رایانه این روش را مورد بحث قرار می دهیم. معلوم می شود که مورد ماتریس عمومی A کاملا متفاوت از ماتریس عادی A است.

2. ماتریکس نرمال

اگر A ماتریس نرمال باشد، با مثال ویژه‌ای آن را نشان می دهیم. اگر

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

و $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2,$ ما مقدار زیر را یافتیم

$$\gamma^* = 1.05800, \quad \sigma^* = 1.84331.$$

مقدار مفرد $\sigma_{2n-2}(F(\gamma^*))$ برابر با $\sigma_{2n-2}(F(\gamma^*))$ است.این دو مقدار تقریباً مثل هم هستند.

$$\sigma_{2n-1}(F(\gamma^*)) \simeq \sigma_{2n-2}(F(\gamma^*)).$$

بنابراین در ماتریکس $F(\gamma^*)$، مقدار σ^* تکرار شده است.

بگذارید $u^{(2n-1)}, v^{(2n-1)}$ and $u^{(2n-2)}, v^{(2n-2)}$ جفتی از بردارهای مفرد $F(\gamma^*)$ همراه با σ_{2n-1} و σ_{2n-2}، باشد.تلاش برای استفاده از هر یک از این جفت ها برای اجرای ساخت و ساز که در قضیه ۲ شرح داده شد، منجر به نتایج فاجعه بار می شود. یعنی برای ماتریکس $\Delta^{(2n-1)} = -\sigma^* U^{(2n-1)} V^{(2n-1)\dagger}$, داریم و بدست آوردیم که

$$\|\Delta^{(2n-1)}\| = 1.49826 \times 10^{12},$$

$$\text{le } \Delta^{(2n-2)} = -\sigma^* U^{(2n-2)} V^{(2n-2)\dagger}$$

$$\|\Delta^{(2n-2)}\| = 6.26340 \times 10^{12}.$$

آسان است دلیلی پیدا کنیم که چرا تساوی 6در هر دو مورد نقض شده است.با محاسبه $u_1^* v_2$ به دست آوردیم

$u^{(2n-1)}, v^{(2n-1)}$

-0.14488

و برای $u^{(2n-2)}, v^{(2n-2)}$

$$0.60502.$$

در هر مورد بالا، تساوی 2، تقریباً حتی نگه داشته نمی شود. از این رو برابری (4) نقض می شود.

وضعیت را می توان به صورت زیر اصلاح کرد. عدد زیررادر نظر بگیرید

$$\sigma^* = \sigma_{2n-1}(F(\gamma^*))$$

چون مقدار مفرد $F(\gamma^*)$ و بردارهای $u^{(2n-1)}$ and $u^{(2n-2)}$به عنوان یک پایه دقیق در زیرمجموعه مفرد چپ با σ^* همراه است . در این فضا به دنبال بردار نرمال شده هستیم.

$$u = \alpha u^{(2n-1)} + \beta u^{(2n-2)}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1,$$

و با بردار مفرد راست ترکیب می شود

$$v = \alpha v^{(2n-1)} + \beta v^{(2n-2)}$$

به منظور برآوردن رابطه (2)

$$\mathrm{Re}(u_1^* v_2) = 0.$$

با قرار دادن (7) و (8) در (9)، رابطه را به دست می آوریم

$$(\bar{\alpha} \quad \bar{\beta})\mathrm{Re}W\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = 0,$$

in which

$$W = \begin{pmatrix} u_1^{(2n-1)*}v_2^{(2n-1)} & u_1^{(2n-1)*}v_2^{(2n-2)} \\ u_1^{(2n-2)*}v_2^{(2n-1)} & u_1^{(2n-2)*}v_2^{(2n-2)} \end{pmatrix},$$

and

$$W_r = \mathrm{Re}W = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}W_{11} & (W_{12}+\overline{W_{21}})/2 \\ (\overline{W_{12}}+W_{21})/2 & \mathrm{Re}W_{22} \end{pmatrix}.$$

وجود راه حل مشخص برای معادله ۱۰ با این واقعیت معین می شود که ماتریکس 10 نامحدود است. در حقیقت $(\gamma) = \sigma_{2n-2}(F(\gamma))$. Let $\mu_1 \geqslant \mu_2$ مقادیر ویژه ماتریس $\mathrm{Re}W$ میباشد.سپس مشتقات سمت راست از توابع f and g at γ^* برابر با o μ_2 and μ_1 است.

$$f'(\gamma^{*+}) = \mu_2, \quad g'(\gamma^{*+}) = \mu_1,$$

از آنجا که f کاهش می یابد و g در سمت راست γ * افزایش می یابد، نتیجه گیری می کنیم که

$$\mu_2 < 0 \quad \text{and} \quad \mu_1 > 0.$$

اعداد α و β را می توان برای مثال به روش زیر یافت.

$$W_r = PMP^*, \quad M = \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2),$$

تقسیم طیفی W. Set باشد

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix},$$

و نوشتن (10) به عنوان

$$\mu_1|\gamma|^2 + \mu_2|\delta|^2 = 0, \quad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.$$

جفت

$$\left(\frac{|\mu_2|}{|\mu_1|+|\mu_2|}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\frac{|\mu_1|}{|\mu_1|+|\mu_2|}\right)^{\frac{1}{2}}$$

یک راه حل برای سیستم 14 است.به یاد بیاورید که μ1 و μ2 تعداد علامت های مختلف است.با بکار بردن 13، $\alpha, \beta.$ را به دست آوردیم.

در مثال زیر با ماتریکسA تکنیک زیر به دست می آید:

$$\alpha = -0.89822, \quad \beta = -0.43955.$$

برای بردار های مرتبط هفت و هشت ، داریم:

$$u_1^* v_2 = -1.45717 \times 10^{-16}.$$

ماتریکس Δ ساخته شده از این بردارها دارای نورم زیر است:

$$1.84350,$$

که در توافق خوبی با σ^* است

$$U^*U = \begin{pmatrix} 0.09189 & 0.21587 \\ 0.21587 & 0.90811 \end{pmatrix}, \quad V^*V = \begin{pmatrix} 0.09191 & 0.21590 \\ 0.21590 & 0.90809 \end{pmatrix},$$

و در نهایت داریم $U^*U \simeq V^*V.$.