آشنایی با فهرست رنگ های گراف

خلاصه

یکی از زمینه های متداول و مفید نظریه ی گراف ، گراف رنگ ها است. گرافی را گراف رنگی گویند که به رئوس آن اعداد صحیح نسبت داده می شود به طوری که هیچ دو رأس مجاوری عدد صحیح یکسان ندارند.

این مسئله اغلب در زمانبندی و مجراهای کابردی رخ می دهد. یک فهرست رنگی ، اعداد صحیح را به رئوس یک گراف نسبت می دهد با این شرط که قبلا اعداد صحیح از لیست های ویژه ی رنگ های در دسترس در هر رأس آمده باشند.

برای یک کاربرد فیزیکی این مسئله ، یک شبکه ی بیسیم را در نظر بگیرید. با توجه به محدودیت های سخت افزاری ، هر رادیو مجموعه فرکانس های محدودی دارد، از آنجاییکه هر کدام از آنها می توانند ارتباط برقرار کنند و رادیو ها در بین یک فاصله ی معین از یکدیگر نمی توانند بدون تداخل در فرکانس های مشابه عمل کنند. ما این مسئله را به کمک یک گراف با نشان دادن رادیو های بیسیم به وسیله ی رئوس گراف و نسبت دادن یک فهرست به هر رأس مطابق ، فرکانس های در دسترس آنها مدلسازی کردیم. سپس رنگ های گراف را از میان این لیست ها جستجو کردیم.

کلمات کلیدی: لیست رنگ ها،قابلیت انتخاب، الگوریتم حریص

گراف ها

مقدمه

فرض کنید $G=(V , E)$ یک گراف است. ما مجموعه ی رأس G را به وسیله ی $V(G)$ و مجموعه ی یال G را توسط $E(G)$ نشان داده ایم. تعداد رئوس با $|V(G)|$ و به همین ترتیب تعداد یال ها با $|E(G)|$ مشخص شده اند.

یکی از زمینه های رایج نظریه ی گراف مطالعه ی گراف های رنگی است.

در صورتی یک رنگ خاص از یک گراف تابع $f: V(G) \to Z_+$ است که :

$$\forall\, u\,, vb \;\in V(G), f(u) = f(v)\; if\; uv \in E(G)$$

ما عدد رنگی G را با x(G) (کوچک ترین عدد صحیح مثبت k به طوری که G یک رنگ به خصوص داشته باشد که اعداد صحیح {یک ، دو، ... و k} را به V(G) اختصاص دهد) تعریف می کنیم. به علاوه اگر k هر عدد صحیح باشد به طوری که G یک رنگ ب خصوص از رنگ های {یک ، دو، ... و k} داشته باشد می گوییم G ، k رنگ پذیر است. L:V(G)→ $2c$ را یک تابع که به هر رأس $v \in V(G)$ یک فهرست از رنگ های $L(v) \subseteq C$ اختصاص می دهد. اگر وجود داشته باشد یک تابع $f: V(G) \to C$ به طوری که $f(v) \in L(V)$ برای تمام $v \;\in V(G)$ و $f(u) = f(V)$ برای $uv \in E(G)$ سپس G ، L _ رنگ پذیر گفته می شود. [4]

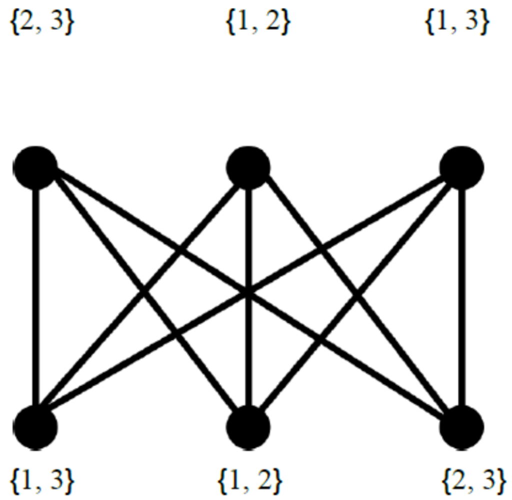
این تعاریف مفهوم یک فهرست رنگی هستند. توجه کنید که یک گراف رنگی چونان که در گذشته تعریف شد یک مورد خاص از فهرست های رنگی است. به عبارت دیگر تا وقتی که تمام فهرست ها از مجموعه ی { X(G) , ... , 2, 1} باشد چنین است. اگر k یک عدد صحیح مثبت باشد تابع L چنین است که |L(v)|=k برای تمام $v \in V(G)$ و گراف G یک فهرست رنگی بخصوص است ، آنگاه گوییم G یک k_ انتخابی است. و عدد انتخاب را XL(G) تعریف می کنیم که کمترینی جون k باشد، بنابر این G یک فهرست رنگی خاص بدون اهمیت دارد که فهرست ها به رئوس نسبت داده شده اند. ولی بیش از این صحبت نکرده و به زودی مثالی خواهیم زد.

بیشتر تحقیقات در باره ی فهرست های رنگی شامل پیدا کردن XL(G) برای انواع بخصوصی از گراف ها یا پیدا کردن محدودیت های مختلف داده شده روی نقش رنگ ها می شود. به هر حال ، ما می توانیم از هر تابع $L: V(G) \to 2c$ که فهرست ها را به رئوس یک گراف G منسوب می کند استفاده کنیم، به طوری که در آینده در فصل 3 خواهیم دید.

به عنوان مثال بارز، از آنجائی که رنگ های گراف موارد خاصی از فهرست رنگی هستند، برای تمام گراف های G داریم: $X(G) \leq XL(G)$.

اردوئوس و همکارانش با نمودار 1.1 ثابت کردند که نامساوی اکید وجود دارد.

برای تمام گراف های دوقسمتی X(G)=2 ، اما در نمودار 1.1 ما می بینیم که هر رأس فهرستی بیش از دو دارد، چنانکه در رئوس دیده می شود اما رنگ آمیزی صحیح امکان پذیری از فهرست های نسبت داده شده وجود ندارد. بنابر این برای این گراف $XL(G) > X(G)$،در حقیقت محققین همچنین نشان می دهند که گراف عمومی وجود ندارد که چه مقدار XL(G) متجاوز از X(G) می شود.



قضیه 1 : چنانچه |V(G)| افزایش یابد برای اینکه بفهمیم XL(G) چه مقدار می تواند از X(G) متجاوز شود، گرافی وجود ندارد.

کاربرد فهرست های رنگ آمیزی

رنگ های گراف برای حل مسائل مختلف در حوزه ی زمان بندی کانال مسئله ی واگذار شده مفید هستند. طبیعتا آنچه به طور ویژه از کاربرد های فهرست رنگ ها که با مقادیر محدودی هستند بر می آید، می تواند به چیز های معینی نسبت داده شود. در این قسمت ما تعداد اندکی مثال از این مسائل و اینکه چطور فهرست های رنگ آمیزی برای حل آن ها مفید هستند عرضه می کنیم.

زیت هوفر و ویس کاربرد فهرست های رنگی را با ثبت برای پردازش محاسبات توضیح دادند. آن ها یک وضعیت شرح دادند با واحد های تابعب چندگانه ، برخی قادر به جمع و ضرب و بعضی جمع به تنهایی.

سپس فهرست رنگ ها برای راهنمایی برنامه ریزی استفاده شد، به عنوان مثال اگر یک عملیات نیازمند تکثیر باشد، نمی تواند به یک واحد جمع به تنها مختص شود. به همین منظور هر عملیات به یک لیست از واحد هایی که می توانند آن را پردازش کنند و یک لیست از مسئله ی آشکار فهرست رنگ آمیزی اختصاص داده شده است.

فهرست دوم مسئله ی رنگ آمیزی ، زمانی رخ می دهد که ثبت شده ها را به ذخیره سازی مقادیر متوسط اختصاص می دهند.

عملیات ها فهرست های معین از مقادیر ثبت شده ی مربوط به هر مقدار ثبت شده ی واحد های محاسبات ضروری هستند. اگر یک عملیات نیازمند افزایشی پیرو یک ضریب باشد، مقدار متوسط افزایش نباید در یک فهرست ذخیره شود، که به وسیله ی یک ضریب اشتراک در دسترس قرار گرفته است.

این مسائل پس از مشخص کردن مقدار ثبت شده ی تخصیص داده شده مناسب و دستورالعمل برنامه ریزی برای محاسبه ی مطلوب حل می شود. زیرا مسئله ی فهرست رنگ آمیزی ان پی هارد ، زیتآفرو و ویس از ویژگی های معین از پدیدار شدن گراف ها و از واگذاری مسئله در دستور کار برای پیدا کردن یک رنگ فایده می دهد.

کاربرد دیگر فهرست رنگ آمیزی ها مجرای واگذاری مسئله است. راما چاندرا ، بلدینگ و بادجیکوت در شبکه ی بیسیم نزدیک هم تداخل غالبی در یکدیگر را مطرح کردند. [9]

بدینسان ، برای محدود کردن تداخل امواج و جبران نیاز سخت افزاری، یک مسئله ی ضروری دسترسی به یک نویزگیر است. این کار به وسیله ی یک فهرست رنگ آمیزی مدل سازی شده.راماچاندرا و همکارانش ،

اختصاص دادن فرکانس ها به یک شبکه ی غربالگری بیسیم که از ترکیبی از امواج رادیویی چندگانه و امواج رادیویی انفرادی نویزگیرها ساخته شده بود را توضیح دادند.

امواج رادیویی چندگانه ی نویزگیر، دارای امواج رادیویی بی سیم متعددی هستند که می توانند روی کانال های روی هم ریخته نشده تنظیم شوند و با سایر امواج رادیویی ارتباط برقرار کنند.

از طرف دیگر ، امواج رادیویی انفرادی نویزگیرها ، تنها می توانند بر روی یک کانال تنظیم شوند.

در به تصویر کشیدن این مسئله به وسیله ی یک مسئله ی نظریه ی گراف ، فرض شده که سخت افزار شبکه از قبل کار گذاشته شده است، به طوری که ، جانمایی شبکه مفروض است. سپس هر رادیو با یک رأس مطابقت می کند. بدین معنی که اگر یک نویزگیر ، سه رادیو دارد آن نویزگیر با سه رأس مطابقت می کند. هر یال نمایانگر یک ارتباط بیسیم بین رادیو ها در جانمایی شبکه ی معینی می باشد. این گراف ، G نامیده می شود. مبتکرین سپس در جایی که هر یال در G متناسب با یک رأس بود، گراف ناسازگار امواج رادیویی چندگانه (MCG) را ایجاد کردند. سپس اگر دو ارتباط بیسیم در G با هم تداخل کردند یک یال ما بین رئوس MCG که ارتباط آن با هم داخل کرده اند کشیده می شود. فهرست های فرکانس های در دسترس به هر رأس در MCG تخصیص داده شده اند و یک رنگ آمیزی صحیح پیگیری شده است. راما چاندرا و همکارانش به وسیله ی استفاده از الگوریتم جستجوی پهنای اول و اختصاص کانال ها به رئوس MCG بر اشکال مسئله ی فهرست رنگ آمیزی فائق آمدند. هر شبکه در جایی که آن شبکه به یک شبکه ی خارجی متصل شده است ، یک گذرگاه نویزگیر دارد. این نویزگیر به عنوان نقطه ی شروع جستجو ی پهنای اول انتخاب شده استاز اینرو اتصالات ، میزبان بیشترین ترافیک فرض شده اند.

یکی از رئوس MCG مطابق با یک ارتباط بیسیم با گذرگاه نویزگیر رنگ شده ی اول خواهد بود و رنگ آمیزی برای بقیه ی MCG در راه کم کردن تداخلات ، ادامه خواهد داشت. 4

به خاطر داشته باشید که مسئله ی فهرست رنگ آمیزی حقیقتا در اینجا یک فهرست رنگ آمیزی از یال های G می باشد. رنگ آمیزی یال در فصل 4 بیشتر توضیح داده خواهد شد.

K قابلیت انتخاب از گراف ها

ساده ترین توابع از حیث فهم ، توابع ثابت هستند. به همین علت ما در خلال فصل بعدی اول قابلیت انتخاب K را برای مسافت ثابت K قبل از حرکت به سمت فهرست توابع بی ثبات تحلیل می کنیم.

در این فصل ما دو گراف قابل انتخاب را کاملا توصیف کرده و نشان می دهیم که 5 گراف مسطح قابل انتخاب هستند. به طوری که غالبا بسیاری از دلایل برای دنبال کردن مباحث مفید و طولانی موضوع نظریه ی گراف می باشد. ما برای شکیبایی خوانندگان ، برای نشان دادن نتایج واقعا زیبا تحقیق کردیم و چیز های زیادی برا ی آموختن از تکنیک های این دلایل وجود دارد.

2 گراف قابل انتخاب

در این فصل یک بیو گرافی از هر 2 گراف قابل انتخاب که یافت می شود تهیه کردیم. اگرچه اول ما باید یک سری تعاریف را ارائه دهیم. همانطور که به خاطر داریدمعنی kقابل انتخاب ، این بود که فهرست روی هر رأس ، طولی به اندازه ی k دارد و آن هم از هر شکل از فهرست ها بود، گراف G ممکن بود به طور صحیح رنگ شه باشد.

گراف های مسطح

در فرضیات ارودوس و همکارانش تمام گراف های مسطح ، 5 قابل انتخاب بودند. چهارده سال قبل ، این نظریات توسط کارستن توماس اثبات شده بود. ما شواهد را در اینجا حاضر کردیم ، اما اول باید یک توضیح و یک مقدمه بیاوریم.

یک مثلث بندی تقریبی یک گراف مسطح ساده است که از یک سکل بیرونی که درون آن به مثلث هایی تقسیم شده که از ترکیب رئوس و یال هابه وجود آمده اند ترکیب یافته است. [6]

مقدمه ی 1 : برای هر گراف مسطح G یک مثلث بندی تقریبی وجود داردکه یک کپی متناظر از G را به عنوان یک گراف اصلی در بر دارد.

ما یک الگوریتم پرشمول برای فهرست رنگ آمیزی یک گراف مطرح کردیم. مأموریت یک مسئله ی گراف معین (G,L,W) و یک مرتب سازی رئوس G ، بازخورد الگوریتم 1 به عنوان ، یک رنگ آمیزی جزئی است:

$$V(G) \to Z_+$$

به طوری که C(v) برای تمام رئوس v که رنگ ها را دریافت می کنند در L(v) باشد.

الگوریتم 1 الگوریتم پرشمول

ورودی : مرتب سازی رئوس G , v_1 , v_2, ... , v_n تابع وزنی w ، فهرست رنگهای $L(v_i)$

خروجی : رنگ آمیزی جزئی C از G

color←minimum color in the lists L(vi)

max←maximum color in the lists L(vi)

whilecolor < max do

forj = 1 to ndo

ifvjis uncolored and color is in L(vj) then

iffor every colored neighbor vkof vj, |c(vk) −color| ≥w(vkvj) then

c(vj) = color

end if

end if

end for

color←color + 1

end while

ما به خواننده اجازه می دهیم این مطلب را که بازخورد محتوای الگوریتم 1 ، یک رنگ آمیزی کامل از G می باشد را چک کند. این یک رنگ آمیزی صحیح است. همچنین اگر الگوریتم 1 رنگ k را به یک رأس اختصاص ندهد، بی پرده دیده میشود، سپس یکی از دنباله هاباید متوقف شود :

1. رأس v_j یک رنگ k' را در حالی که $k' < k$ باشد اختصاص داده است.
2. رنگ k به مجاور v_i اختصاص داده شده در حالی که $i < j$ در یک مرتب سازی معین
3. تعدادی مجاور v_i از v هستند.