رویکردی برای تصمیم گیری گروهی با روابط ترجیحی غیر قطعی ناقص همگن

چکیده

برای مسائل تصمیم گیری گروهی کاربردی، تصمیم گیران اقدام به ارایه روابط ترجیحی غیر قطعی ناهمگن به دلیل عدم قطعیت ناشی از محیط تصمیم گیری و روابط فرهنگ و سوابق آموزشی می کنند.گاهی اوقات، تصمیم گیران ممکن است دارای دانش عمیق از مسائل حل شده نبوده و روابط ترجیحی ناقص را ارایه می کنند.در

این مقاله بر مسائل تصمیم گیری گروهی با روابط ترجیحی غیر قطعی ناقص همگن از جمله روابط ترجیحی مضربی غیر قطعی، روابط ترجیحی فازی غیر قطعی، روابط ترجیحی زبانی غیر قطعی و روابط ترجیحی فازی شهودی تاکید می شود. برای حل چنین مسائل تصمیم گیری GDM، یک روش آنالیز تصمیم گیری پیشنهاد می شود. بر اساس پیوستگی مضربی روابط ترجیحی غیر قطعی، مدل بهینه سازی دو منظوره با هدف بیشینه سازی هر دو اجماع گروهی و پیوستکی فردی هر تصمیم گیر ارایه می شود. با حل مدل بهینه سازی، اوزان اولیه انواع جایگزین ها را می توان به دست آورد. در نهایت، برخی نمونه ها برای نشان دادن امکان پذیری و کارایی روش پیشنهادی استفاده می شوند.

لغات کلیدی: تصمیم گیری گروهی، رابطه ترجیحی غیر قطعی ناقص، وزن اولویت، بهینه سازی

2–مقدمات

در این بخش، ما یک سری مفاهیم و مقدمات پایه را در رابطه با روابط ترجیحی غیر قطعی ناقص از جمله روابط ترجیحی مضربی غیر قطعی، روابط ترجیحی فازی غیر قطعی، روابط ترجیحی زبانی غیر قطعی و روابط ترجیحی فازی شهودی ارایه می دهیم.

برای راحتی آنالیز، فرض می شود که $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$، مجموعه متناهی از جایگزین ها باشد که xi دلالت بر $i \in \{1, 2, \ldots, n\} = N$ دارد. به علاوه ما بر بردار وزنی اولویت بدست امده از رابطه ترجیحی با $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$، دلالت داریم طوری که $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ w_i \geqslant 0,\ i \in N$.

تعریف 1:(Saaty and Vargas, 1987).: ماتریکس $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ موسوم به رابطه ترجیحی مضربی غیر قطعی در صورتی است که $\tilde{a}_{ij}$ با شرط $\tilde{a}_{ij} = [a_{ii}^-, a_{ii}^+],\ a_{ii}^+ \geqslant a_{ii}^-,\ a_{ii}^- a_{ii}^+ = a_{ii}^+ a_{ii}^- = 1,\ a_{ii}^+ = a_{ii}^- = 1$ سازگار باشد، که $\tilde{a}_{ij}$ درجه ترجیحی با مقدار بازه ای است که xi به xj ترجیح داده شده و $a_{ii}^-,\ a_{ii}^+ \in \{1/9, 1/8, 1/7, \ldots, 1/2, 1, 2, \ldots,\ 7, 8, 9\}, i,\ j \in N.$

تعریف 2(وانگ و همکاران 2005). اگر $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n} = ([a_{ij}^-, a_{ij}^+])_{n\times n}$ به صورت رابطه ترجیحی مضربی بازه ای باشد. اگر بردار مثبت $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$ باشد طوری که منطقه امکان محدب ذیل است:

$$\Theta = \left\{ w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}} | a_{ij}^- \leqslant \frac{w_i}{w_j} \leqslant a_{ij}^+,\ w_i > 0, i, j \in N, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\} \quad (2.1)$$

غیر بدیهی است و $\tilde{A}$ موسوم به رابطه ترجیحی مضربی بازه ای پیوسته است.

تعریف 3(زو 2004 ب). ماتریکس $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n}$ موسوم به رابطه ترجیحی فازی غیر قطعی است در صورتی که $\tilde{b}_{ij}$ به صورت $\tilde{b}_{ij} = [b_{ij}^-, b_{ij}^+]\, b_{ij}^+ \geqslant b_{ij}^-,\ b_{ij}^- + b_{ji}^+ = b_{ij}^+ + b_{ji}^- = 1,\ b_{ii}^+ = b_{ii}^- = 0.5$ باشد، که $\tilde{b}_{ij}$ درجه ترجیحی بازه ای که با آن مقدار xi به xj ترجیح داده شده و $b_{ii}^-,\ b_{ii}^+ \in [0,1],\ i,\ j \in N$.

تعریف 4(زو و چن 2008 الف). فرض کنید که $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n} = ([b_{ij}^-, b_{ij}^+])_{n\times n}$ رابطه ترجیحی فازی بازه ای باشد. در صورتی که یک بردار مثبت $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ وجود داشته باشد طوری که ناحیه امکان سنجی محدب به صورت ذیل است:

$$\Theta = \left\{ w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T | b_{ij}^- \leqslant \frac{w_i}{w_i + w_j} \leqslant b_{ij}^+, w_i > 0, i, j \in N, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}. \tag{2.2}$$

غیر بدیهی است و آنکاه $\tilde{B}$ موسوم به رابطه ترجیح فازی بازی است.

تعریف 5(زو 2007 ب): فرض کنید که $S = \{s_\alpha | \alpha = 0, 1, \ldots, T\}$ مجموعه زبان شناسی با کاردینالیتی ظاهری بر اساس تعریف هررا و همکاران 1996 باشد و $I(s_\alpha)$ دلالت بر شاخص برچسب s_α زبان شناسی دارد یعنی $I(s_\alpha) = \alpha$ ، آنگاه ماتریکس $\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})_{n \times n}$ موسوم به رابطه ترجیحی زبانی غیر قطعی خواهد بود در صورتی که مشروط بر $\tilde{l}_{ij} = [l_{ij}^-, l_{ij}^+],\ I(l_{ij}^+) \geqslant I(l_{ij}^-),\ I(l_{ij}^-) + I(l_{ji}^+) = I(l_{ij}^+) + I(l_{ji}^-) = T,\ l_{ii}^+ = l_{ii}^- = s_{T/2}$ باشد که $\tilde{l}_{ij}$ درجه ترجیح بازه ای است که در آن xi به xj ترجیح داده شده و $l_{ij}^-,\ l_{ij}^+ \in S,\ i,\ j \in N$ است.

گائو و پنگ (2011) فرمولی را برای تبدیل رابطه ترجیحی زبانی غیر قطعی $\tilde{L} = (\tilde{l}_{ij})_{n\times n} = ([l_{ij}^-, l_{ij}^+])_{n\times n}$ به رابطه ترجیحی فازی غیر قطعی $\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij})_{n\times n} = ([b_{ij}^-, b_{ij}^+])_{n\times n}$ به صورت ذیل ارایه کرد:

$$\tilde{b}_{ij} = [b_{ij}^-, b_{ij}^+] = \left[\frac{I(l_{ij}^-)}{T}, \frac{I(l_{ij}^+)}{T}\right], \quad i,\ j \in N, \tag{2.3}$$

که $T+1$ کاردینالینی زبان تعریف شده در تعریف 5 است.

تعریف 6-(زو 2007 ب): رابطه ترجیحی فازی شهودی $\tilde{R}$ با ماتریکس $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ با $\tilde{r}_{ij} = \langle (x_i, x_j),\ u(x_i, x_j),\ v(x_i, x_j)\rangle,\ i,\ j \in N$، نشان داده می شود.برای راحتی کار، فرض می کنیم که $\tilde{r}_{ij} = (u_{ij}, v_{ij}\ \ j \in N,$ ، که $\tilde{r}_{ij}$ مقدار فازی شهودی متشکل از درجه قطعیت u_{ij} است که با آن xi به j ترجیح داده شده و درجه قطعیت v_{ij} با xi به xj نسبت داده شده و

$u_{ij},\ v_{ij}$ مشروط بر $u_{ij} - v_{ij}$ بوده و به صورت درجه عدم قطعیتی تعریف می شود که xi به xj نسبت داده می شود. $i,\ j \in N$.

تعریف 7(زو 2007 الف)فرض کنید که $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times n} = ((u_{ij}, v_{ij}))_{n\times n}$ رابطه ترجیحی فازی شهودی باشد. اگر بردار مثبت وجود داشته باشد، $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$ طوری که منطقه امکان سنجی محدب ذیل به دست می اید:

$$\Theta = \left\{ w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}} | u_{ij} \leqslant \frac{w_i}{w_i + w_j} \leqslant 1 - v_{ij}, w_i > 0, i,j \in N, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}. \tag{2.4}$$

غیر بدیهی بوده و R موسوم به رابطه ترجیح فازی شهودی پیوسته است.

بر طبق گفته زو (2005)، رابطه ترجیحی موسوم به رابطخ ترجیحی ناقص خواهد بود اگر برخی از مولفه های رابطه ترجیحی را نتوان توسط تصمیم گیرنده بدست اورد و دیگر عناصر می توانند فراهم شوند. در صورتی که همه عناصر مجهول را بتوان توسط عناصر دیگر بدست اورد، رابطه ترجیحی قابل قبول خواهد بود.بر اساس قضیه ارایه شده توسط زو (2006)، در صورتی که رابطه ترجیحی غیر قطعی ناقص قابل قبول است، آنگاه حداقل یک عنصر قابل قبول در هر لاین و یا ستون برای رابطه ترجیح وجود دارد یعنی حداقل N-1 برای جایکزین ها. در این مقاله، همه روابط ترجیحی ناقص به صورت قابل قبول می باشند.

3- توصیف مسئله تصمیم گیری گروهی

همان طور که در بخش 2 عنوان شد، فرض کنید که $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$، مجموعه متناهی از جایکزین ها باشد، که XI موسوم به آی امین شق است، N= $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. به علاوه فرض کنید، $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_q\}$ مجموعه تصمیم گیران باشند، که d_k دلالت بر K امین تصمیم گیری دارد، $k \in \{1, 2, \ldots, q\} = K$ و ما بر بردار وزنی تصمیم گیران با $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q)^{\mathrm{T}}$، تاکید داریم طوری که $\sum_{k=1}^{q} \lambda_k = 1,\ 0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1,\ k \in K.$ می باشد. در این جا تصمیم گیران ترجیحاتی نسبت به جایگزین ها از طریق مقایسات دودویی در اختیار می گذارد یعنی اطلاعات ترجیحی به صورت روابط ترجیحی است. روابط به صورت چهار فرمت روابط ترجیح غیر قطعی ناقص قابل قبول ارایه شده اند:

بر اساس تنوع روابط ترجیحی، مجموعه تصمیم گیران را می توان به چهار زیر مجموعه تقسیم کرد: $D = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. به خصوص فرض کنید که $D_1 = \{d_1, d_2, \ldots, d_{h_1}\}$، $D_2 = \{d_{h_1+1}, d_{h_1+2}, \ldots, d_{h_2}\},\ D_3 = \{d_{h_2+1}, d_{h_2+2}, \ldots, d_{h_3}\},\ D_4 = \{d_{h_3+1}, d_{h_3+2}, \ldots, d_q\}$،

.برای $d_k \in D_1$،رابطه ترجیح مضرب غیر قطعی ناقص به صورت $\tilde{A}^k = (\tilde{a}_{ij}^k)_{n\times n} = ([a_{ij}^{k-}, a_{ij}^{k+}])_{n\times n}$ $k \in \{1, 2, \ldots, h_1\} = K_1$ برای $d_k \in D_2$ نشان داده می شود، . رابطه ترجیح فازی غیر قطعی ناقص به صورت ذیل $k \in \{h_1+1, h_1+2, \ldots, h_2\} = K_2$ $\tilde{B}^k = (\tilde{b}_{ij}^k)_{n\times n} = ([b_{ij}^{k-}, b_{ij}^{k+}])_{n\times n}$ برای $d_k \in D_2$، نشان داده شده و رابطه ترجیح ناقص $\tilde{B}^k = (\tilde{b}_{ij}^k)_{n\times n} = ([b_{ij}^{k-}, b_{ij}^{k+}])_{n\times n}$ $k \in \{h_1+1, h_1+2, \ldots, h_2\} = K_2$ برای $d_k \in D_3$، .بوده و رابطه ترجیح غیر قطعی ناقص $\tilde{L}^k = (\tilde{l}_{ij}^k)_{n\times n} = ([l_{ij}^{k-}, l_{ij}^{k+}])_{n\times n},\ k \in \{h_2+1, h_2+2, \ldots, h_3\} = K_3;$

$d_k \in D_4,$ می باشد و در نهایت نوع شهودی به صورت $\tilde{R}^k = (\tilde{r}_{ij}^k)_{n\times n} = \left((u_{ij}^k, v_{ij}^k)\right)_{n\times n},\ k \in \{h_3+1, h_3+2, \ldots, q\} = K_4.$ نشان داده می شود. عناصر روابط ترجیحی غیر قطعی با فی نشان داده می شود. برای راحتی بیشتر، ما به معرفی شاخص های چهار فرمت از روابط ترجیح ناقص برای نشان دادن معلوم و یا مجهول بودن مولفه های روابط ترجیح می پردازیم. ماتریکس شاخص برای K امین رابطه ترجیحی غیر قطعی به صورت ذیل تعریف می شود:

$$\delta_{ij}^{k}=\begin{cases}1 & \text{for } \tilde{a}_{ij}^{k}\neq\varphi\\ 0 & \text{for } \tilde{a}_{ij}^{k}=\varphi\end{cases},\quad i,\ j\in N,\ k\in K_1, \tag{3.1a}$$

$$\delta_{ij}^{k}=\begin{cases}1 & \text{for } \tilde{b}_{ij}^{k}\neq\varphi\\ 0 & \text{for } \tilde{b}_{ij}^{k}=\varphi\end{cases},\quad i,\ j\in N,\ k\in K_2, \tag{3.1b}$$

$$\delta_{ij}^{k}=\begin{cases}1 & \text{for } \tilde{l}_{ij}^{k}\neq\varphi\\ 0 & \text{for } \tilde{l}_{ij}^{k}=\varphi\end{cases},\quad i,\ j\in N,\ k\in K_3, \tag{3.1c}$$

$$\delta_{ij}^{k}=\begin{cases}1 & \text{for } \tilde{r}_{ij}^{k}\neq\varphi\\ 0 & \text{for } \tilde{r}_{ij}^{k}=\varphi\end{cases},\quad i,\ j\in N,\ k\in K_4. \tag{3.1d}$$

مسئله تصمیم گیری گروهی حل شده در این مقاله بردار وزنی اولیه برای N جایگزین بر اساس روابط ترجیحات ناقص توسط تصمیم گیران بدست می اید طوری که جایگزین ها را می توان رتبه بندی کرد.

4- روش پیشنهادی برای GDM

در این بخش، ما اقدام به ارایه روشی برای حل مسئله تصمیم گیری می کنیم. ایده های اساسی رویکرد پیشنهادی به شکل ذیل است: نخست برای مسئله تصمیم گیری، ایده هر تصمیم گیر باید نزدیک به ایده های تصمیم گیران دیگر باشد یعنی اجماع تصمیم گیرنده باید در نظر گرفته شود. دوما، برای هر رابطه ترجیحی فردی،پیوستگی باید در نظر گرفته شود. دو نکته باید در نظر گرفته شود که یک روش تصمیم گیری گروهی با روابط ترجیح غیر قطعی ناقص ناهمگن می باشد.

روش تصمیم گیری به شرح ذیل است. نخست، تصمیم گیرنده برای بیان سلیقه خود نسبت به جایگزین ها با استفاده از فرمت های روابط ترجیحی بر اساس اراده خویش دعوت می شود و سپس ماتریس های شاخص روابط ترجیحی را می توان با معادلات 3.1 ,(3.1b) ,(a

(3.1c) and (3.1d) به دست آورد. سپس، مدل بهینه سازی دو منظوره با هدف بیشینه سازی اجماع گروه و پیوستکی فردی تصمیم گیرنده ها ایجاد می شود.وزن اولویت هر یک از جایکزین ها با حل مدل بهینه سازی دو منظوره با استفاده از رویکرد بیشینه کمینه تعیین و محاسبه می شود.(زیمرمن و همکاران 1978). بر اساس اوزان الویت، راه حل های جایگزین مقایسه و رتبه بندی می شوند. در نهایت روش های جایگزین بهینه را می توان انتخاب کرد. در بقیه این بخش، چگونگی ایجاد مدل بهینه سازی دو منظوره وجود دارد. برای راحتی بیشتر، مفاهیم تعریف شده در بخش 3 در سرتاسر این بخش استفاده می شوند. و بافرض $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$، بردار وزنی بدست امده از قضاوت گروه طوری است که $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ w_i > 0,\ i \in N$:

1-4 محاسبه شاخص اجماع گروهی

در این زیر بخش، ما به محاسبه شاخص اجماع گروه می پردازیم. قبل از تعریف شاخص، ابتدا به محاسبه بازه های وزنی اولویت فردی بر اساس هر رابطه ترجیحی فردی می پردازیم.

1-1-4 روابط ترجیحی مضربی غیر قطعی

با تعریف 2، در صورتی که روابط ترجیحی مضربی غیر قطعی، با k امین تصمیم گیرنده مطابق با ایده گروه خواهد بود: می توان گفت:

$$a_{ij}^{k-} \leqslant \frac{w_i}{w_j} \leqslant a_{ij}^{k+}, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1, \; i, \; j \in N, \; i \neq j, \; k \in K_1. \qquad (4.1)$$

بدیهی است، معادله 4-1 را می توان به شکل ذیل نوشت:

$$a_{ij}^{k-}w_j \leqslant w_i \leqslant a_{ij}^{k+}w_j,\ \text{for all}\ \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_1, \tag{4.2}$$

i.e.

$$\delta_{ij}^k a_{ij}^{k-}w_j \leqslant \delta_{ij}^k w_i \leqslant \delta_{ij}^k a_{ij}^{k+}w_j,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_1. \tag{4.3}$$

جمع همه ورودی های معادله 4-3 برای $j \in N,\ j \neq i$ به صورت ذیل است:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k-}w_j \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k w_i \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k+}w_j,\ i \in N,\ k \in K_1. \tag{4.4}$$

چون $\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k \neq 0$، داریم:

$$\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k-}w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k+}w_j,\ i \in N. \tag{4.5}$$

4-1 -2 روابط ترجیح فازی غیر قطعی

با تعریف 4، اگر رابطه ترجیح فازی غیر قطعی با k امین تصمیم گیرنده مطابق با ایده گروه است و نامساوی باید به شکل ذیل صدق کند:

$$b_{ij}^{k-} \leqslant \frac{w_i}{w_i + w_j} \leqslant b_{ij}^{k+}, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1, \ i, \ j \in N, \ i \neq j, \ k \in K_2, \quad (4.6)$$

یعنی

$$\frac{b_{ij}^{k-}}{1 - b_{ij}^{k-}} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{b_{ij}^{k+}}{1 - b_{ij}^{k+}} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1, \ i, \ j \in N, \ i \neq j, \ k \in K_2.$$

چون $b_{ij}^{k-} + b_{ji}^{k+} = 1$ و $b_{ij}^{k+} + b_{ji}^{k-} = 1$، داریم:

As $b_{ij}^{k-} + b_{ji}^{k+} = 1$ and $b_{ij}^{k+} + b_{ji}^{k-} = 1$, we have

$$\frac{b_{ij}^{k-}}{b_{ji}^{k+}} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{b_{ij}^{k+}}{b_{ji}^{k-}} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1, \ i, \ j \in N, \ i \neq j, \ k \in K_2, \quad (4.8)$$

i.e.

$$\delta_{ij}^k \frac{b_{ij}^{k-}}{b_{ji}^{k+}} w_j \leqslant \delta_{ij}^k w_i \leqslant \delta_{ij}^k \frac{b_{ij}^{k+}}{b_{ji}^{k-}} w_j, \ i, \ j \in N, \ i \neq j, \ k \in K_2. \quad (4.9)$$

مجموع همه ورودی های معادلات 4-9 برای همه $j \in N,\ j \neq i,$ داریم:

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} \frac{b_{ij}^{k-}}{b_{ji}^{k+}} w_j \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} w_i \leqslant \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} \frac{b_{ij}^{k+}}{b_{ji}^{k-}} w_j,\ \ i \in N,\ \ k \in K_2. \qquad (4.10)$$

As $\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} \neq 0$

می توان گفت:

$$\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k}} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} \frac{b_{ij}^{k-}}{b_{ji}^{k+}} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k}} \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} \frac{b_{ij}^{k+}}{b_{ji}^{k-}} w_j,\ \ i \in N. \qquad (4.11)$$

4-1-3 رابطه ترجیحی زبانی غیر قطعی

چون عناصر و مولفه های روابط ترجیحی زبانی به صورت شفاهی یا زبانی می باشند، بردار وزنی اولویت را نمی توان از رابطه ترجیحی زبانی اشتقاق کرد. به منظور ترکیب روابط ترجیح زبانی با دیگر روابط ترجیحی عددی و خروجی یک گروه با بردار وزنی، روابط

ترجیح زبانی باید به دیگر انواع روابط ترجیح تبدیل کرد.برای مثال Fan and Zhang (2010)،, روابط ترجیحی زبانی را به روابط ترجیحی فازی و بردار نهایی وزنی بر اساس پیوستکی مضربی روابط ترجیحی فازی تبدیل کرد. در این مقاله، ما یک راهبرد مشابه را اتخاذ کردیم که در آن روابط ترجیحی زبانی به روابط ترجیحی فازی غیر قطعی و استفاده از پیوستگی روابط ترجیحی فازی غیر قطعی استفاده می شوند.

با معادله 2-3 ما هر یک از روابط زبانی $\tilde{L}^k,\ k \in K_3$ به رابطه ترجیحی فازی غیر قطعی $\tilde{B}^k = ([b_{ij}^{k-}, b_{ij}^{k+}])_{n\times n},\ k \in K_3$ تبدیل می کنیم طوری که:

$$\left[b_{ij}^{k-}, b_{ij}^{k+}\right] = \begin{cases} \left[\frac{I(l_{ij}^{k-})}{T^k}, \frac{I(l_{ij}^{k+})}{T^k}\right] & \delta_{ij}^k = 1, \\ \varphi & \delta_{ij}^k = 0. \end{cases},\ i,\ j \in N,\ k \in K_3, \qquad (4.12)$$

که T^k+1 کاردینالیتی مجموعه زبان با k امین تصمیم گیرنده، $k \in K_3$. است.

سپس، پیوستگی چند بعدی روابط ترجیحی فازی غیر قطعی را می توان استفاده کرد. با معادلات 4-8 و 4-11، اوزان اولیه بدست امده از k امین رابطه ترجیحی زبانی تصمیم گیرنده باید مطابق با شرط ذیل باشد:

$$\frac{I\left(l_{ij}^{k-}\right)}{T^k} \Big/ \frac{I\left(l_{ji}^{k+}\right)}{T^k} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{I\left(l_{ij}^{k+}\right)}{T^k} \Big/ \frac{I\left(l_{ji}^{k-}\right)}{T^k} w_j,$$

برای همه $\delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_3,$ (4.13)

$$\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}\frac{I\left(l_{ij}^{k-}\right)}{T^{k}}\bigg/\frac{I\left(l_{ji}^{k+}\right)}{T^{k}}w_j \leqslant w_i$$

$$\leqslant \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}\frac{I\left(l_{ij}^{k+}\right)}{T^{k}}\bigg/\frac{I\left(l_{ji}^{k-}\right)}{T^{k}}w_j,\ i \in N, \tag{4.14}$$

i.e.

$$\frac{I\left(l_{ij}^{k-}\right)}{I\left(l_{ji}^{k+}\right)}w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{I\left(l_{ij}^{k+}\right)}{I\left(l_{ji}^{k-}\right)}w_j,\ \text{for all } \delta_{ij}^{k}=1,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_3, \tag{4.15}$$

or

$$\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}\frac{I\left(l_{ij}^{k-}\right)}{I\left(l_{ji}^{k+}\right)}w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}\frac{I\left(l_{ij}^{k+}\right)}{I\left(l_{ji}^{k-}\right)}w_j,\ i \in N. \tag{4.16}$$

4-4 روابط ترجیح فازی شهودی

با تعریف 7، در صورتی که رابطه ترجیحی فازی با k امین تصمیم گیرنده $(k \in K_4)$ مطابق با ایده گروه باشد داریم:

$$u_{ij}^k \leqslant \frac{w_i}{w_i + w_j} \leqslant 1 - v_{ij}^k, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_4, \tag{4.17}$$

i.e.

$$\frac{u_{ij}^k}{1 - u_{ij}^k} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{1 - v_{ij}^k}{v_{ij}^k} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_4. \tag{4.18}$$

به همین ترتیب:

$$\delta_{ij}^k \frac{u_{ij}^k}{1 - u_{ij}^k} w_j \leqslant \delta_{ij}^k w_i \leqslant \delta_{ij}^k \frac{1 - v_{ij}^k}{v_{ij}^k} w_j,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_4. \tag{4.19}$$

جمع همه ورودی های معادله 4-19 برای همه $j = 1, 2, \ldots, n, j \neq i,$

می دهد:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^k \frac{u_{ij}^k}{1 - u_{ij}^k} w_j \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^k w_i \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^k \frac{1 - v_{ij}^k}{v_{ij}^k} w_j,\ i \in N,\ k \in K_4. \tag{4.20}$$

بر اساس، $\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq i}}^{n} \delta_{ij}^k \neq 0$، داریم:

$$\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}\frac{u_{ij}^{k}}{1-u_{ij}^{k}}w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}\frac{1-v_{ij}^{k}}{v_{ij}^{k}}w_j,\ i\in N. \quad (4.21)$$

5-1-4 شاخص اجماع گروه

فرض کنید:

$$a_{ij}^{k-}=\frac{b_{ij}^{k-}}{b_{ji}^{k+}},\ a_{ij}^{k+}=\frac{b_{ij}^{k+}}{b_{ji}^{k-}},\ \text{for all}\ \delta_{ij}^{k}=1,\ i,\ j\in N,\ i\neq j,\ k\in K_2, \quad (4.22)$$

$$a_{ij}^{k-}=\frac{I\left(l_{ij}^{k-}\right)}{I\left(l_{ji}^{k+}\right)},\ a_{ij}^{k+}=\frac{I\left(l_{ij}^{k+}\right)}{I\left(l_{ji}^{k-}\right)},\ \text{for all}\ \delta_{ij}^{k}=1,\ i,\ j\in N,\ i\neq j,\ k\in K_3, \quad (4.23)$$

$$a_{ij}^{k-}=\frac{u_{ij}^{k}}{1-u_{ij}^{k}},\ a_{ij}^{k+}=\frac{1-v_{ij}^{k}}{v_{ij}^{k}},\ \text{for all}\ \delta_{ij}^{k}=1,\ i,\ j\in N,\ i\neq j,\ k\in K_4. \quad (4.24)$$

با معادلات، 4–5، 4–11، 4–16 و 4–21، اوزان اولویت بدست امده از k امین رابطه ترجیح تصمیم گیرنده را می توان به شکل ذیل عنوان کرد:

$$\bar{w}_i^k = \left[w_i^{k-}, w_i^{k+}\right] = \left[\frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k-} w_j, \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k+} w_j\right], \; i \in N, \; k \in K. \quad (4.25)$$

از این روی، انحراف بینk امین ایده تصمیم گیرنده و l امین ایده را می توان به شکل ذیل محاسبه کرد:

$$d(k,l) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(\left|w_i^{k-} - w_i^{l-}\right| + \left|w_i^{k+} - w_i^{l+}\right|\right), \; k, \; l \in K, \; k \neq l. \quad (4.26)$$

سپس، انحراف بینk امین ایده و دیگر ایده ها به صورت ذیل محاسبه می شود:

$$d_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{q} d(k,l) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left(|w_i^{k-} - w_i^{l-}| + |w_i^{k+} - w_i^{l+}| \right), \; k \in K. \tag{4.27}$$

اگر اهمیت هر تصمیم گیرنده در نظر گرفته شود، سپس انحراف کلی را می توان به صورت ذیل بدست اورد:

$$d = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k d_k = \sum_{k=1}^{q} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \lambda_k \left(|w_i^{k-} - w_i^{l-}| + |w_i^{k+} - w_i^{l+}| \right)$$
$$= \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{l=k+1}^{q} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (\lambda_k + \lambda_l) \left(|w_i^{k-} - w_i^{l-}| + |w_i^{k+} - w_i^{l+}| \right). \tag{4.28}$$

با معادله 4–25، 4–28 را می توان به صورت ذیل بازنویسی کرد:

$$d = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-1} \sum_{l=k+1}^{q} \sum_{i=1}^{n} (\lambda_k + \lambda_l) \left(\left| \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} a_{ij}^{k-} w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l} a_{ij}^{l-} w_j \right| \right.$$
$$\left. + \left| \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} a_{ij}^{k+} w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l} a_{ij}^{l+} w_j \right| \right). \tag{4.29}$$

در این جا معادله 4-29 به صورت شاخص اجماع گروه تعریف می شود. برای رسیدن به اجماع خوب برای هر مسئله تصمیم گیری، مقدار b را باید کمینه کرد:

4-2 محاسبه شاخص پیوستگی کل

برای مسائل پیوستگی با روابط ترجیحی، پیوستگی بسیار مهم است، چون قضاوت های ناپیوسته موجب ایجاد تصمیم گیری های غیر منطقی می شوند. برای حل مسئله تصمیم گیری گروهی، در صورتی که روابط ترجیح توسط تصمیم گیرنده پایدار و پیوسته باشد، معادلات 4-2، 4-7، 4-15 و 4-18 صادق خواهد بود. بر اساس تعاریف چهار فرمت از روابط ترجیحی غیر قطعی، معادلات 4-2، 4-7، 4-15 و 4-18 را می توان به شکل ذیل بازنویسی کرد:

$$a_{ij}^{k-} w_j \leqslant w_i \leqslant a_{ij}^{k+} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K_1, \quad (4.30)$$

$$\frac{b_{ij}^{k-}}{b_{ji}^{k+}} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{b_{ij}^{k+}}{b_{ji}^{k-}} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K_2. \quad (4.31)$$

$$\frac{I(l_{ij}^{k-})}{I(l_{ji}^{k+})} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{I(l_{ij}^{k+})}{I(l_{ji}^{k-})} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K_3, \quad (4.32)$$

$$\frac{u_{ij}^k}{1 - u_{ij}^k} w_j \leqslant w_i \leqslant \frac{1 - v_{ij}^k}{v_{ij}^k} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K_4. \quad (4.33)$$

با معادلات 4–22 و 4–23، معادلات 4–30، 4–31، 4–31 و 4–33 را می توان به صورت ذیل بازنویسی کرد:

$$a_{ij}^{k-} w_j \leqslant w_i \leqslant a_{ij}^{k+} w_j, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K. \quad (4.34)$$

با این حال ترجیحات تصمیم گیرنده به طور کامل در بیشتر موارد فاقد پیوستکی است. در نتیجه، معادله 4–34 به طور هم زمان صدق

نخواهد کرد. به علاوه، ترجیح نسبت به برخی جایگزین ها از طرف تصمیم گیرنده های مختلف می تواند متناقض باشد. برای حل این مسائل، ما معادله 4–34 را با معرفی متغیر های انحراف به این صورت می نویسیم:

$$a_{ij}^{k-} w_j - \eta_{ij}^{k-} \leqslant w_i \leqslant a_{ij}^{k+} w_j + \eta_{ij}^{k+}, \text{ for all } \delta_{ij}^k = 1,\ i, j \in N,\ i < j,\ k \in K, \quad (4.35)$$

که η_{ij}^{k-} و η_{ij}^{k+} اعداد حقیقی غیر منفی می باشند:

با در نظر گرفتن اهمیت تصمیم گیری، انحراف کلی برای همه روابط ترجیح فردی را می توان به این صورت محاسبه کرد:

$$s = \sum_{k=1}^{q} \lambda_k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \delta_{ij}^k \left(\eta_{ij}^{k-} + \eta_{ij}^{k+} \right). \quad (4.36)$$

بدیهی است که هر چه مقدار s کوچک تر باشد، پیوستکی روابط ترجیح بیشتر خواهد بود. برای رسیدن به پیوستکی بیشتر، مقدار s باید به حداقل برسد.

3-4 تثبیت مدل های بهینه سازی برای اشتقاق بردار وزن الویت

همان طور که در بالا گفته شد، برای رسیدن به نتیجه منطقی تر، هر دو شاخص اجماع گروه و شاخص پیوستکی کلی باید کمینه شوند. بر اساس معادلات 4-29 و 4-36، مدل بهینه سازی ذیل را می توان ایجاد کرد:

$$
\begin{aligned}
\min\ Z_1 = & \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1}\sum_{l=k+1}^{q}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_k+\lambda_l) \\
& \left(\left|\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k-}w_j-\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l-}w_j\right|\right. \\
& \left.+\left|\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k+}w_j-\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l+}w_j\right|\right) \\
\min\ Z_2 = & \sum_{k=1}^{q}\lambda_k\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\delta_{ij}^{k}\left(\eta_{ij}^{k-}+\eta_{ij}^{k+}\right) \\
\text{s.t.}\ & a_{ij}^{k-}w_j-\eta_{ij}^{k-}\leqslant w_i\leqslant a_{ij}^{k+}w_j+\eta_{ij}^{k+},\ \text{for all}\ \delta_{ij}^{k}=1,\ i,j\in N,\ i<j,\ k\in K \\
& \sum_{i=1}^{n}w_i=1,\ w_i>0,\ i\in N \\
& \eta_{ij}^{k-},\ \eta_{ij}^{k+}\geqslant 0,\ \text{for all}\ \delta_{ij}^{k}=1,\ i,j\in N,\ i<j,\ k\in K.
\end{aligned}
\tag{M-1}
$$

Let

$$
\begin{aligned}
\mu_i^{kl+} = \frac{1}{2}\Bigg[& \left|\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k-}w_j-\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l-}w_j\right| \\
& +\left(\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k-}w_j-\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l-}w_j\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{4.37}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu_i^{kl-} = \frac{1}{2}\Bigg[& \left|\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k-}w_j-\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l-}w_j\right| \\
& -\left(\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k-}w_j-\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l-}w_j\right)\Bigg],
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

$$v_i^{kl+} = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k+}w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l+}w_j\right| + \left(\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k+}w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l+}w_j\right)\right], \tag{4.39}$$

$$v_i^{kl-} = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k+}w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l+}w_j\right| - \left(\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k+}w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l+}w_j\right)\right],$$

$$\text{for all } i \in N,\ k,\ l \in K,\ k < l. \tag{4.40}$$

سپس مدل M-1، را می توان به صورت ذیل تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & Z_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1}\sum_{l=k+1}^{q}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_k + \lambda_l)\left(\mu_i^{kl-} + \mu_i^{kl+} + v_i^{kl-} + v_i^{kl+}\right) \\
\min \quad & Z_2 = \sum_{k=1}^{q}\lambda_k\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\delta_{ij}^{k}\left(\eta_{ij}^{k-} + \eta_{ij}^{k+}\right) \\
\text{s.t.} \quad & a_{ij}^{k-}w_j - \eta_{ij}^{k-} \leqslant w_i \leqslant a_{ij}^{k+}w_j + \eta_{ij}^{k+}, \\
& \quad \text{for all } \delta_{ij}^{k} = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K \\
& \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k-}w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l-}w_j \\
& \quad + \mu_i^{kl-} - \mu_i^{kl+} = 0,\ i \in N,\ k,\ l \in K,\ k < l \\
& \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k+}w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l+}w_j \\
& \quad + v_i^{kl-} - v_i^{kl+} = 0\ i \in N,\ k,\ l \in K,\ k < l \\
& \sum_{i=1}^{n}w_i = 1,\ w_i > 0,\ i \in N \\
& \eta_{ij}^{k-},\ \eta_{ij}^{k+} \geqslant 0,\ \text{for all } \delta_{ij}^{k} = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K \\
& \mu_i^{kl-},\ \mu_i^{kl+},\ v_i^{kl-},\ v_i^{kl+} \geqslant 0,\ i \in N,\ k,\ l \in K,\ k < l.
\end{aligned}
\qquad \text{(M-2)}
$$

مدل (M-1) یک مدل برنامه نویسی دو منظوره خطی است. در ذیل، ما از رویکرد کمینه بیشینه زیمرمن (زیمرمن 1978) برای حل مدل استفاده می کنیم. نخست ما حل برخی مدل های بهینه سازی ذیل می پردازیم:

$$\min / \max \quad Z_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-1}\sum_{l=k+1}^{q}\sum_{i=1}^{n}(\lambda_k + \lambda_l)(\mu_i^{kl-} + \mu_i^{kl+} + v_i^{kl-} + v_i^{kl+})$$

$$\text{s.t.} \quad a_{ij}^{k-} w_j - \eta_{ij}^{k-} \leqslant w_i \leqslant a_{ij}^{k+} w_j + \eta_{ij}^{k+},$$

$$\text{for all } \delta_{ij}^{k} = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in K$$

$$\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k}} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} a_{ij}^{k-} w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l}} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l} a_{ij}^{l-} w_j$$

$$+\mu_i^{kl-} - \mu_i^{kl+} = 0,\ i \in N,\ k,\ l \in K,\ k < l$$

$$\frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k}} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{k} a_{ij}^{k+} w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l}} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^{l} a_{ij}^{l+} w_j$$

$$+v_i^{kl-} - v_i^{kl+} = 0,\ i \in N,\ k,\ l \in K,\ k < l$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,\ w_i > 0,\ i \in N, \quad \eta_{ij}^{k-},\ \eta_{ij}^{k+} \geqslant 0,$$

$$\text{for all } \delta_{ij}^{k} = 1,\ i,\ j \in N,\ i < j,\ k \in k$$

$$\mu_i^{kl-},\ \mu_i^{kl+},\ v_i^{kl-},\ v_i^{kl+} \geqslant 0,\ i \in N,\ k,\ l \in K,\ k < l \qquad \text{(M-3)}$$

و

$$
\begin{aligned}
\min/\max\ \ Z_2 = &\sum_{k=1}^{q}\lambda_k\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\delta_{ij}^{k}\left(\eta_{ij}^{k-}+\eta_{ij}^{k+}\right)\\
\text{s.t.}\ \ & a_{ij}^{k-}w_j-\eta_{ij}^{k-}\leqslant w_i\leqslant a_{ij}^{k+}w_j+\eta_{ij}^{k+},\ \text{for all}\ \delta_{ij}^{k}=1,\ i,j\in N,\ i<j,\ k\in K\\
& \frac{1}{\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k-}w_j-\frac{1}{\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l-}w_j\\
& \quad+\mu_i^{kl-}-\mu_i^{kl+}=0,\ i\in N,\ k,\ l\in K,\ k<l\\
& \frac{1}{\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{k}}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{k}a_{ij}^{k+}w_j-\frac{1}{\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{l}}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\delta_{ij}^{l}a_{ij}^{l+}w_j\\
& \quad+v_i^{kl-}-v_i^{kl+}=0,\ i\in N,\ k,\ l\in K,\ k<l\\
& \sum_{i=1}^{n}w_i=1,\ w_i>0,\ i\in N\\
& \eta_{ij}^{k-},\ \eta_{ij}^{k+}\geqslant 0,\ \text{for all}\ \delta_{ij}^{k}=1,\ i,j\in N,\ i<j,\ k\in K\\
& \mu_i^{kl-},\ \mu_i^{kl+},\ v_i^{kl-},\ v_i^{kl+}\geqslant 0,\ i\in N,\ k,\ l\in K,\ k<l.
\end{aligned}
\tag{M-4}
$$

مدل های (M-3) and (M-4) مدل های برنامه نویسی ساده خطی می باشند و می توان آن ها را با استفاده از بسته های نرم افزاری بهینه سازی حل کرد. فرض کنید Z_1^{min} و Z_1^{max} مقدار تابع حداقل و حداکثر هدف برگرفته شده از مدل M-3 باشند، Z_2^{min} و Z_2^{max} توابع حداقل و

حداکثر بر گرفته از مدل M-4 باشند، سپس، می توان توابع عضویت ذیل را ایجاد کرد:

$$\mu_1(Z_1) = \begin{cases} 1 & \text{if } Z_1 < Z_1^{min} \\ \frac{Z_1^{max} - Z_1}{Z_1^{max} - Z_1^{min}} & \text{if } Z_1^{min} \leqslant Z_1 \leqslant Z_1^{max} \\ 0 & \text{if } Z_1 > Z_1^{max}, \end{cases} \tag{4.41}$$

و

$$\mu_2(Z_2) = \begin{cases} 1 & \text{if } Z_2 < Z_2^{min} \\ \frac{Z_2^{max} - Z_2}{Z_2^{max} - Z_2^{min}} & \text{if } Z_2^{min} \leqslant Z_2 \leqslant Z_2^{max} \\ 0 & \text{if } Z_2 > Z_2^{max}. \end{cases} \tag{4.42}$$

با روش ماکزیمم-مینیمم زیمرمن(زیمرمن 1978)، مدل M-1 را می توان به مدل ذیل تبدیل کرد:

$$
\begin{aligned}
&\max\ \theta \\
&\text{s.t. } \mu_1(Z_1) \geqslant \theta \\
&\quad \mu_2(Z_2) \geqslant \theta \\
&\quad a_{ij}^{k-} w_j - \eta_{ij}^{k-} \leqslant w_i \leqslant a_{ij}^{k+} w_j + \eta_{ij}^{k+}, \text{for all } \delta_{ij}^k = 1, i, j \in N, i < j, k \in K \\
&\quad \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k-} w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^l} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^l a_{ij}^{l-} w_j \\
&\quad + \mu_i^{kl-} - \mu_i^{kl+} = 0, i \in N, k, l \in K, k < l \\
&\quad \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^k a_{ij}^{k+} w_j - \frac{1}{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^l} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \delta_{ij}^l a_{ij}^{l+} w_j \\
&\quad + v_i^{kl-} - v_i^{kl+} = 0, , i \in N, k, l \in K, k < l \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1, w_i > 0, i \in N \\
&\quad \eta_{ij}^{k-}, \eta_{ij}^{k+} \geqslant 0, \text{for all } \delta_{ij}^k = 1, i, j \in N, i < j, k \in K \\
&\quad \mu_i^{kl-}, \mu_i^{kl+}, v_i^{kl-}, v_i^{kl+} \geqslant 0, i \in N, k, l \in K, k < l.
\end{aligned}
\tag{M-5}
$$

با حل مدل فوق، اوزان الویت را می توان به صورت $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$ نشان داد که مقدار تتا نشان دهنده حداقل سطح قابل قبول دو تابع هدف است. به طور خلاصه، ما یک روش تصمیم گیری گروهی را به صورت ذیل ارایه می دهیم:

مرحله 1: بدست اوردن ماتریکس های شاخص $\Delta^k,\ k \in K$ توسط معادلات (3.1a)، (3.1b), (3.1c) and (3.1d)

مرحله 2: محاسبه مقدار a_{ij}^{k-} و a_{ii}^{k+} برای همه $\delta_{ii}^k = 1,\ i,\ j \in N,\ i \neq j,\ k \in K_2 \cup K_3^{\check{}} \cup K_4$ با معادله 4–22

مرحله 3: حل مدل M-3 را برای بدست اوردن Z_1^{min} and Z_1^{max}

مرحله 4: حل مدل M-4 برای بدست اوردن Z_2^{min} and Z_2^{max}

مرحله 5: ایجاد توابع عضویت برای Z1 و Z2 با معادلات 4–41 و 4–42 و سپس حل مدل M-5 برای اشتقاق بردار وزنی الویت

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^{\mathrm{T}}$$

مرحله 6:بر اساس W، رتبه بندی جایگزین ها و انتخاب بهترین روش باقی مانده.

6- بحث مدل پیشنهادی

در این بخش ما به بررسی محدودیت ها و مزیت های ی مدل تصمیم گیری پیشنهادی می پردازیم. به طور کلی، مدل پیشنهادی دارای مزیت های جالب ذیل است:

1-این مدل پیشنهادی، گام جدیدی در جهت ترکیب روابط ترجیح غیر قطعی ناقص است. و به تصمیم گیران امکان می دهد تا اطلاعات ترجیحی خود را نسبت به روش های دیگر به طور انعطاف پذیری بیان کنند. از طریق بررسی منابع می توان ذکر کرد که بیشتر مطالعات موجود در خصوص GDM با اطلاعات ناهمگن تاکید بر اشتقاق

اوزان اولویت با ساختار ترجیحی خاص دارد(برای مثال، فان و زانگ 2010، و زو 2011). و مطالعات اندکی در خصوص GDM ناهمکن با ساختار ترجیح عدم قطعیت وجود داشته است. گایو و پنگ 2011 استفاده از روابط ترجیح ناهمکن را برای آنالیز swot پیشنهاد کردند با این حال این روش را در شرایط روابط ترجیح ناقص نمی تواند کارایی داشته باشد. زیا و زو (2011) و لیو و همکاران (2012) برخی روش ها را برای تکمیل مولفه های فازی غیر قطعی و روابط چندگانه ارایه کرده و سپس از آن ها برای گروه بندی بهره بردند. با این حال این روش ها باید مکمل با نخستین عناصر از دست رفته باشند و نمی توان از آن ها برای حل روابط ناهمگن ناقص با روابط ترجیحی استفاده کرد. اگرچه، زو و چن (2008 ب)، به بررسی مسائل تصمیم

گیری گروهی با ساختار های ترجیح غیر قطعی مشخص پرداختند از جمله مقادیر بهره وری فاصله ای، روابط ترجیح فازی فاصله ای، و روابط ترجیح فازی بازه ای، این مطالعه بر مسائل gdm چند معیاره پرداخته و نمی تواند اوزان الویت را از روابط ترجیح ناهمکن که در این جا نیز ذکر شد اشتقاق کند.

2- ایده های اساسی رویکرد پیشنهادی بسیار صریح و ساده است. بر اساس پیوستکی چندگانه فرمت های مختلف روابط ترجیحی، یک مدل بهینه سازی با هدف کمینه سازی هر دو شاخص اجماع گروه و شاخص پیوستکی فردی برای اشتقاق اوزان اولویت استفاده می شوند. از این روی نتیجه به دست آمده بسیار منطقی است. چون اوزان اولویت با حل مدل های بهینه سازی بدست می اید، تبدیلات کم تر از

روابط ترجیح ناهمگن با یک نوع رابطه ترجیحی نیاز است که از اتلاف اطلاعات جلوگیری می کند.

3- مدل پیشنهادی را می توان به عنوان مدل کلی تصمیم گیری در نظر گرفت. در صورتی که همه عناصر ماتریس های شاخص 1 باشند، مدل پیشنهادی را می توان برای مسائل GDM با روابط ترجیح عدم قطعیت ناهمگن پیشنهاد کرد. به علاوه، مدل پیشنهادی را می توان برای حل مسائل GDM با ترکیبی از چهار نوع روابط ترجیح ذکر شده در مقاله استفاده کرد.

4- از مثال های فوق، می توان پی برد که اوزان الویت بدست آمده از روش پیشنهادی در بازه های واحد نهفته است. از این روی، روش پیشنهادی را می توان با فرایند سلسله مراتب تحلیلی (ساتی 1998)

برای حل مسائل تصمیم گیری چند معیاره تحت محیط تصمیم گیری غیر قطعی به خصوص زمانی که روابط ترجیح ناقص در مسئله تصمیم گیری نقش دارند تلفیق کرد.

با این حال، مدل پیشنهادی هنوز دارای برخی محدودیت هاست. اول از همه، در صورتی که تعداد جایگزین ها یا تصمیم گیرنده ها بسیار بزرگ باشد، تعداد محدودیت های مدل بیشتر خواهد بود. در این صورت، تصمیم گیری کمی پیچیده تر خواهد بود. از این روی نکته جالب ساده سازی مدل و یا بررسی دیگر مدل های تصمیم گیری ساده تر است. دوما، برای تلفیق روابط غیر قطعی ترجیح زبانی، آن ها را به روابط ترجیح فازی غیر قطعی تبدیل می کنیم که منجر به از دست رفت اطلاعات می شود. در نهایت، روش پیشنهادی چهار فرمت از

ساختار های ترجیح عدم قطعیت را در نظر می گیرد که قادر به ترکیب با ساختار های ترکیبی در شکل مقادیر بهره وری بازه ای و اردینال های ترجیح عدم قطعیت نیست. همه این مسائل در آینده حل خواهند شد.

7- نتیجه گیری

برای مسائل تصمیم گیری گروهی کاربردی، تصمیم گیران اقدام به ارایه روابط ترجیحی غیر قطعی ناهمگن به دلیل عدم قطعیت ناشی از محیط تصمیم گیری و روابط فرهنگ و سوابق آموزشی می کنند.گاهی اوقات، تصمیم گیران ممکن است دارای دانش عمیق از مسائل حل شده نبوده و روابط ترجیحی ناقص را ارایه می کنند.در این مقاله بر مسائل تصمیم گیری گروهی با روابط ترجیحی غیر قطعی ناقص همگن از جمله روابط ترجیحی مضربی غیر قطعی، روابط ترجیحی فازی غیر قطعی، روابط ترجیحی زبانی غیر قطعی و روابط

ترجیحی فازی شهودی تاکید می شود. برای حل چنین مسائل تصمیم گیری GDM، یک روش آنالیز تصمیم گیری پیشنهاد می شود. بر اساس پیوستگی مضربی روابط ترجیحی غیر قطعی، مدل بهینه سازی دو منظوره با هدف بیشینه سازی هر دو اجماع گروهی و پیوستکی فردی هر تصمیم گیر ارایه می شود. با حل مدل بهینه سازی، اوزان اولیه انواع جایگزین ها را می توان به دست آورد.

اگرچه مثال های ارایه شده در این مقاله، مربوط به مسئله انتخاب جایگزین های سرمایه گذاری برای شرکت چند ملیتی بود، مدل GDM پیشنهادی را می توان به دیگر مسائل تصمیم گیری کاربردی نظیر انتخاب عرضه کننده، ارزیابی عملکرد شرکت و استفاده از تابع کیفیت به خصوص زمانی که تصمیم گیران از کشور ها و فرهنک و تحصیلات متفاوتی می باشند و یا زمانی که تصمیم گیران به اجماع کلی در خصوص استفاده از نوع روابط ترجیح نمی رسند تعمیم داد.

(ترجمه بخش 1 این مقاله، موجود نیست)